Programme Marocain - BIOF

TC
Scientifique
& Technologique

ETINCELLE MATHS

Manuel de l'élève

Auteurs

HASSAN KHALKALLAH
Professeur de maths
Cycle secondaire qualifiant
(Coordinateur)

MOHAMED RAHNAOUI
Ex. Inspecteur principal
de l'enseignement secondaire

MOHAMED MOUSSADDAR
Professeur de maths
Cycle secondaire qualifiant

SALAH DIOUA
Professeur de maths
Cycle secondaire qualifiant

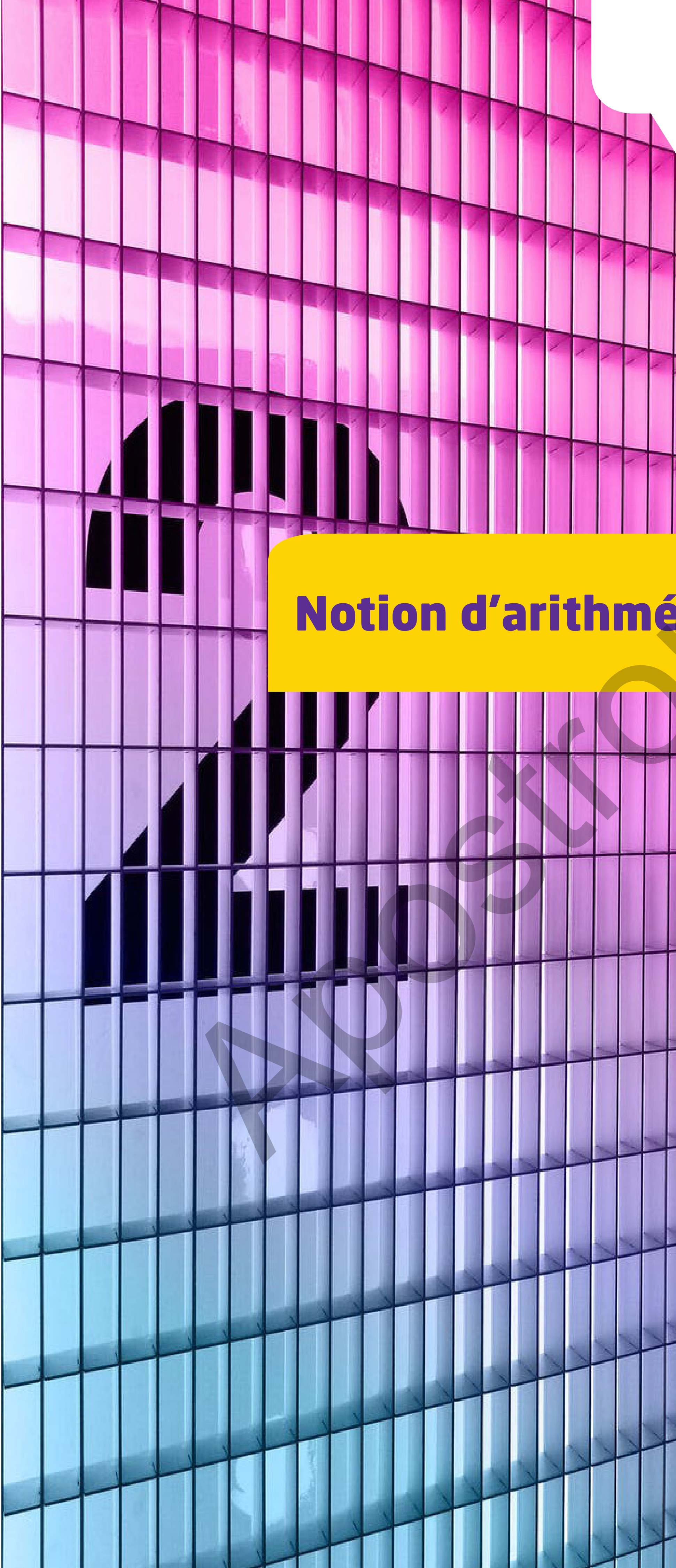
SOMMAIRE

Outils et fiches ressources

N°	Chapitre	Contenus du programme	Compétences	Prolongements
1	**Arithmétique dans $\mathbb{N}$**	• Les nombres pairs et les nombres ; impairs ; • Multiples d'un nombre, le plus petit multiple commun de deux nombres ; • Diviseurs d'un nombre, le plus grand diviseur commun de deux nombres. • Nombres premiers, Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers.	• Utiliser la parité et la décomposition en produit de facteurs premiers pour résoudre des problèmes simples portants sur les entiers naturels. • Connaître comment prouver qu'un nombre est premier. • Effectuer la décomposition en produit de facteurs premiers. • Déterminer $PGCD(a, b)$ et $PPCM(a, b)$.	• Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ en premier année et deuxième année sciences Mathématiques. • En informatique dans les programmes de cryptage, sur internet pour sécuriser vos achats.
2	**Ensembles de nombres** $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$ **et** $\mathbb{R}$	• Écriture et notations exemples de nombres Irrationnels. • Opérations dans IR • Les puissances et leurs propriétés ; puissance de 10 ; • Écriture scientifique d'un nombre décimal ; • Les identités remarquables : $(a+b)^2 ; (a-b)^2$ $a^2 - b^2 ; a^3 - b^3 ; a^3 + b^3$ • Développement et factorisation	• Reconnaître les relations entre les nombres et distinguer les différents ensembles de nombres ; • Déterminer l'écriture convenable d'une expression algébrique selon la situation étudiée	• En physique l'écriture scientifique • Étude d'une fonction numérique.
3	**Ordre dans** $\mathbb{R}$	• Ordre et opérations • La valeur absolue et ses propriétés Intervalles ; • Encadrement, approximation et approximations décimales.	• Maîtriser les différentes techniques de comparaison de deux expressions. • Reconnaître et déterminer avec une précision donnée, une approximation d'un nombre (ou d'une expression). • Effectuer des majorations et des minorations des expressions algébriques. • Utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées des nombres réels.	• Résolution des inéquations. • Encadrement des nombres irrationnels. • Majorée et minorée une fonction numérique. • Monotonie d'une fonction. • Position relative de deux courbes. • Calcul des limites d'une fonction numérique.
4	**Polynômes**	• Notion de polynôme, égalité de deux polynômes ; • Somme et produit de deux polynômes ; • Racine d'un polynôme, division par $x - a$ • Factorisation d'un polynôme.	• Maîtriser la technique de la division euclidienne par $(x - a)$ et reconnaître la divisibilité par $(x - a)$	• Résolution des équations et inéquations. • Variations d'une fonction numérique.
5	**Équations, Inéquations et systèmes**	• Équations et inéquations du premier degré à une inconnue • Équations et inéquations du second degré à une inconnue • Forme canonique d'un trinôme • Équations du second degré à une inconnue ; • Signe d'un trinôme du second degré • Inéquations du second degré à une inconnue • Les systèmes • Systèmes de deux • Équations du premier degré à deux inconnues. • Régionnement du plan.	• Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations du premier ou du second degré à une inconnue ; - Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant différentes méthodes (combinaison linéaire, substitution, déterminant) ; - Mathématiser, en utilisant des expressions, des équations, des inéquations, des inégalités ou des systèmes, une situation faisant intervenir des quantités variables ; • Représenter graphiquement les solutions d'inéquations ou de systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues, et utiliser cette représentation dans le régionnement du plan et dans la résolution de problèmes.	• Optimisation (programmation linéaire). • Variations d'une fonction.
6	**Calcul vectoriel dans le plan**	• Égalité de deux vecteurs. • Somme de deux vecteurs. • Relation de Chasles. • Multiplication d'un vecteur par un nombre réel ; • Colinéarité de deux vecteurs, alignement de trois points ; • Définition vectorielle du milieu d'un segment.	• Construire un vecteur de différentes origines • Construire la somme de deux vecteurs. • Parallélogramme et propriétés caractéristiques. • Exprimer les notions et les propriétés de la géométrie affine en utilisant l'outil vectoriel et réciproquement. • Résoudre des problèmes géométriques en utilisant l'outil vectoriel.	• Droite dans le plan. • Produit scalaire. • Notion d'une force en physique. • Transformation dans le Plan.

7	**Projection dans le plan**	• La projection sur une droite • La projection orthogonale, la projection sur un axe théorème de Thalès : sens direct et sens réciproque ; • Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs.	• Traduction vectorielle du théorème de THALES.	• Produit scalaire. • Travail d'une force. • Coordonnées d'un point et d'un vecteur dans un repère. • Géométrie dans l'espace.
8	**Droite dans le plan**	• Le repère : coordonnées d'un point, coordonnées d'un vecteur. • Condition de colinéarité de deux vecteurs ; Détermination d'une droite définie par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur. • Représentation paramétrique d'une droite . • Équation cartésienne d'une droite. • Positions relatives de deux droites.	• Exprimer les notions et les propriétés de la géométrie affine et de la géométrie vectorielle à l'aide des coordonnées. • Utiliser l'outil analytique dans la résolution de problèmes géométriques.	• Droites tangentes et asymptotes d'une courbe représentative d'une fonction numérique. • Programmation linéaire.
9/ 12	**Trigonométrie**	**Première partie : chp 9** • Cercle trigonométrique, les abscisses curvilignes d'un point, l'abscisse curviligne principale ; • Angle orienté de deux demi-droites ayant la même origine, la mesure principale, relation de Chasles ; • Relation entre le degré, le radian et le grade ; • Angle orienté de deux vecteurs et mesure de cet angle ; • Lignes trigonométriques d'un nombre réel et lignes trigonométriques d'un angle de deux vecteurs ; **Relations :** $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$; $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ • Lignes trigonométriques d'un angle de mesure : 0 , $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$ • Relations entre les lignes trigonométriques de deux angles dont la somme ou la différence des mesures est égale à : 0 , $\frac{\pi}{2}$; π modulo 2π . **Deuxième partie : chp 12** • Représentation graphique des deux fonctions $\cos$ et $\sin$; • Les équations et inéquations trigonométriques fondamentales : $\sin(x) = a$; $\cos(x) = a$; $\tan(x) = a$ Les angles inscrits, les quadrilatères inscriptibles **Les relations :** $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$ $S = \frac{1}{2}ab\sin(C)$; $S = pr$.	• Utiliser la calculatrice scientifique pour déterminer une valeur approchée d'un angle défini par l'une de ses lignes trigonométriques et inversement ; • Maîtriser les lignes trigonométriques des angles usuels et appliquer les différentes relations. • Tracer les courbes représentatives des fonctions sin et cos et les exploiter pour l'assimilation des notions de périodicité, de parité et de monotonie • Utiliser le cercle trigonométrique pour représenter et déterminer graphiquement les solutions d'équations ou d'inéquations trigonométriques.	• Nombres complexes. • Coordonnées polaires. • Parité et périodicité d'une fonction numérique.
10	**Statistiques**	• Tableaux statistiques ; • Effectifs et effectifs cumulés ; Pourcentage, fréquence, fréquences cumulées ; • Représentations graphiques, histogrammes ; • Paramètres de position : moyenne arithmétique, médiane, mode ; • Paramètres de dispersion : écart moyen, variance, écart type.	• Organiser des données statistiques. • Lire et interpréter des graphiques statistiques. • Interpréter les paramètres de position et les paramètres de dispersion. • Distinguer les différents paramètres de position. • Distinguer les différents paramètres de dispersion.	• Statistiques des populations. • Probabilités. • Économie.

11	**Généralités sur les fonctions**	• Généralités : Ensemble de définitions d'une fonction numérique. Égalité de deux fonctions numériques. • Représentation graphique d'une fonction numérique. • Fonction paire et fonction impaire (interprétation graphique) • Variations d'une fonction numérique ; • Maximum, minimum d'une fonction numérique sur un Intervalle ; • Représentation graphique et variations des fonctions suivantes : $x \to ax^2$; $x \to \frac{a}{x}$; $x \to ax^2 + bx + c$; $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$; $x \to sin(x)$; $x \to cos(x)$.	• Reconnaître la variable et le domaine de définition de cette variable pour une fonction définie par un tableau de données ou une courbe ou une expression. Déterminer graphiquement l'image d'un nombre ; • Déterminer graphiquement un nombre dont l'image est connue à partir de la représentation graphique d'une fonction • Déduire les variations d'une fonction ou les valeurs maximales ou minimales à partir de la représentation graphique de cette fonction. • Résoudre graphiquement des équations et des inéquations. • Tracer la courbe d'une fonction polynôme du second degré ou d'une fonction homographique sans utiliser un changement de repère. • Exprimer, en utilisant la notion de fonction, des situations issues de la vie courante ou des autres disciplines	• Notion des limites. • Dérivation. • Étude d'un mouvement d'un mobile. • Étude graphique d'une fonction en physique et chimie et SVT. • Raisonnement scientifique et communication graphique.
13	**Produit scalaire**	• Définition et propriétés ; • Expression trigonométrique ; • Orthogonalité de deux vecteurs ; • Applications du produit scalaire : • Relations métriques dans le triangle rectangle • Théorème de la médiane • Théorème d'Al Kashi.	• Exprimer la distance et l'orthogonalité à l'aide du produit scalaire ; • Utiliser le produit scalaire dans la résolution de problèmes géométriques ; • Utiliser le théorème d'Al Kashi et le théorème de la médiane dans la résolution d'exercices géométriques.	• Produit scalaire dans l'espace • Travail d'une force.
14	**Transformations du plan**	• Symétrie centrale et axiale. • Translation • Colinéarité de deux vecteurs.	• Reconnaître les figures isométrique et les figures semblables à l'aide de la symétrie, de la translation et de l'homothétie • Résoudre des problèmes géométriques à l'aide des transformations précédentes.	• Résolution des problèmes à l'aide des transformations. • Optique (Physique) • Rotation autour d'un axe.
15	**Géométrie dans l'espace**	• Axiomes d'incidence, • Détermination d'un plan dans l'espace ; • Positions relatives de droites et de plans dans l'espace . • Propriétés du parallélisme et de l'intersection ; • Orthogonalité : orthogonalité d'une droite et d'un plan, orthogonalité de deux plans . • Propriétés du parallélisme et de l'orthogonalité. • Figure géométrique : Pyramide ; cube, cylindre ;parallélépipède …	• Reconnaître et représenter dans le plan des parties de l'espace ; • Reconnaître les cas d'analogie et les cas de non-analogie, entre notions et propriétés dans le plan et celles dans l'espace ; • Utiliser les propriétés de la géométrie dans l'espace pour la résolution de problèmes de la vie courante.	• Géométrie dans l'espace (Étude Analytique)



Notion d'arithmétique

Compétences visées

- Utiliser la parité et la décomposition en produit de facteurs premiers pour résoudre des problèmes simples portant sur les entiers naturels.

Prérequis

- Les nombres entiers naturels.
- Les multiples et les diviseurs d'un entier naturel.
- Nombres pairs et impairs.

Prolongements

- Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ en première année et en 2^{eme} année sciences Mathématiques.
- Cryptographie

JE VÉRIFIE MES ACQUIS

Dans chacun des cas suivants. Indiquer la bonne réponse :

	A	B	C
1 24 est multiple de :	5	14	2
2 14 est un diviseur de :	7	28	$2^2 5^4 7^3$
3 1236 est un multiple de :	9	3	2
4 9 divise :	779	7776	99213467
5 Un entier m est divisible par 5 si :	La somme des unités de m est divisible par 5.	Le chiffre des unités de m est 0 ou 5.	m est un entier impair
6 Si n est impair alors :	$n+1$ est pair	$2n$ est impair	2 divise n
7 2^3+6 est un nombre :	Divisible par 3	pair	impair
8 40 s'écrit sous la forme :	$2^2 \times 5$	$2^3 \times 5$	$2^2 \times 5^2$
9 Parmi les multiples de 7 on trouve 7 :	1 et 7	0 ; 7 ; 14 et 1	2 ; 7 et 17
10 Si $x = 2^2 \times 3 \times 5^7$ alors :	15 divise x	18 divise x	x est un multiple de 200

1 Multiples et diviseurs d'un entier naturel

1 • **Donner** le reste et le quotient de la division euclidienne de 245 par 3.

2 • **Donner** les diviseurs de 245.

3 • **Donner** les multiples de 2 inférieurs ou égales à 30.

4 • **Donner** les multiples de 6 inférieurs à 52.

2 Nombres pairs - Nombres impairs

1 • **Écrire** les nombres pairs compris entre 20 et 45

2 • **Écrire** les nombres impairs compris entre 20 et 45

3 • Un nombre entier est pair s'il est divisible par 2

C'est à dire qu'on peut l'écrire sous la forme $2k$ avec k un entier naturel

Déterminer les nombres pairs parmi les nombres suivants :

204 ; $2\times\frac{1}{3}$; $2\sqrt{3}$; $(13+15)$; $(11-9)$

4 • Un nombre entier est impair s'il n'est pas divisible par 2 c'est à dire qu'on peut l'écrire

Sous la forme $2k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$; 13 est impair car $13=2\times(6)+1$ et $6\in\mathbb{N}$

Déterminer les nombres impairs parmi les nombres suivants : 29 ; $2\times(25)+5$; $2\times\left(\frac{1}{3}\right)+1$; $2\sqrt{5}+1$.

5 •

a. **Montrer** que si n'est pair alors $n(n+1)$ est pair.

b. **Montrer** que si n'est impair alors $n(n+1)$ est pair.

c. Que peut - on conclure?

3 Parité et opérations $(+, -, \times)$

Soient a et b deux entiers naturels avec $a>b$ et $n\in\mathbb{N}^*$

1 • **Montrer** que si a et b sont tous les deux pairs, alors $a+b$ et $a-b$ et $a.b$ sont pairs .

2 • **Montrer** que si a et b sont tous les deux impairs, alors $a+b$ et $a-b$ sont pairs et $a.b$ est impair.

3 • **Montrer** que si a est impair et b pair, alors $a+b$ et $a-b$ sont impairs et $a.b$ est pair.

4 Multiples communs de deux nombres et plus petit commun multiple de deux nombres ($PPCM$)

1 • **Déterminer** tous les multiples de 10 inférieurs à 61

2 • **Déterminer** tous les multiples de 6 inférieurs à 61

3 • **Déterminer** le plus petit commun multiple non nul de 10 et 6 qu'on note $PPCM\ (10;6)$

4 • **Déterminer** $PPCM\ (12;15)$

5 Diviseurs communs de deux nombres et plus grand commun diviseur de deux nombres

1 • Déterminer les diviseurs de 45

2 • Déterminer les diviseurs de 30

3 • Déterminer le plus grand commun diviseur de 45 et 30 qu'on note $PGCD\ (45, 30)$

4 • Déterminer $PGCD\ (28, 96)$

6 Décomposition en produit de facteurs premiers

1 • Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des deux nombres 168 et 86 .

2 • Déterminer les diviseurs de 198 et les diviseurs de 168 .

3 • Quels sont les diviseurs communs à 168 et 86 ?

4 • Quel est le $PGCD$ de 168 et 86 ?

7 Nombres premiers

1 • Déterminer les diviseurs des nombres suivants : 2 - 3 - 5 - 7

2 • Que peut - on remarquer ?

Un nombre entier naturel est dit premier s'il a exactement deux diviseurs distincts 1 et lui même

3 • On **considère** le tableau ci - dessous.

Recopier et colorier les cases des nombres entiers premiers

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

8

Soit a et b deux entiers naturels tels que $a \geq b$. le quotient et le reste de la division de a par b est respectivement q et r .$(a = b\ q + r)$

On pose $d_1 = PGCD\ (a\ , b)$ et $d_2 = Pgcd(b, r)$.

1 • Montrer que d_1 divise b et r , puis en déduire que $d_1 \leq d_2$.

2 • Montrer que d_2 divise a et b , puis en déduire que $d_2 \leq d_1$.

3 • En **déduire** que $Pgcd\,(a\ , b) = Pgcd\,(b\ , r)$.

L'algorithme d'Euclide qui est basé sur le résultat de la troisième question : c'est une suite d'opérations (division euclidienne), qui permet de retrouver le $PGCD$ de deux « grands » nombres en se ramenant à des nombres plus petits. Le $PGCD$ est le dernier reste non nul trouvé.

Ainsi, on procède de la manière suivante :

- On effectue la division euclidienne de a par b . On note r le reste
- On remplace ensuite a par b et b par r .
- Tant que le reste est différent de 0 , on réitère le procédé.

Après un certain nombre d'itérations, on obtiendra un reste égal à 0 .

Le $PGCD$ de a et de b est alors le reste précédent (c'est à dire le dernier reste non nul).

REMARQUE

Si $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $m + n \in \mathbb{N}$
mais si $(m+n) \in \mathbb{N}$ on peut avoir $m \notin \mathbb{N}$ ou $n \notin \mathbb{N}$
$-3+5 \in \mathbb{N}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$

I Ensemble IN

1.1. Définition :

L'ensemble des entiers naturels est l'ensemble $\{0; 1; 2; 3; 4; ...; 50; 51; ...; n; n+1; ...\}$
Qu'on note $\mathbb{N}$.

Exemple

Déterminer parmi les nombres suivants les entiers naturels : 0 ; -2 ; $\frac{1}{2}$; 0, 9 ; $\frac{5}{6}$; 1 ; 4 ; 2 ; 5

1.2. Propriété :

- 0 est le plus petit entier naturel.
- Si m est un entier naturel alors m et $m+1$ sont deux entiers consécutifs.
- Si m et n sont deux entiers naturels alors : $m+n$ et $m.n$ sont aussi des entiers naturels, et si $m > n$ alors $m-n$ est un entier naturel.

Exemple

Soit m un entier naturel, déterminer les valeurs de m pour que $(5m - m^2)$ soit un entier naturel.
$5m - m^2 = m(5-m)$. Pour que $5m - m^2$ soit un entier naturel il faut que $m \leq 5$ c'est à dire $m = 0$ ou $m = 1$, ou $m = 2$ ou $m = 3$ ou $m = 4$, ou $m = 5$

II Multiples et diviseurs d'un entier naturel

2.1. Définition :

- Soit d et m deux entiers naturels. S'il existe un entier naturel q tel que : $m = q.d$ on dit que :
- m est un multiple de d ou m est divisible par d.
- d divise m ou d est un diviseur de m.

Exemple

1. Les diviseurs de 12 sont $1; 2; 3; 4; 6$ et 12
2. Les multiples de 4 inférieurs à 50 sont : $0; 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44$ et 48

Propriété :

- Les multiples de m sont : $0; m; 2m; 3m; 4m; ...; km; (k+1)m; ...$ avec $k \in \mathbb{N}$.
- Le seul multiple de 0 est 0.
- Soient m et n sont deux entiers naturels et $n \neq 0$.
- $\left(\frac{m}{n}\right) \in \mathbb{N}$ si et seulement si (n est un diviseur de m)

Exemple

Les multiples de 3 qui sont inférieurs à 40 sont : 0 ; 3 ;6 ; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33 ;36 ; 39.

REMARQUE

- 0 est un multiple de tous les entiers naturels.
- L'ensemble des multiples de 1 est l'ensemble $\mathbb{N}$.

2.2. Critères de divisibilité par 2; 3 ; 5 ; 9

a. Un nombre est divisible par deux si, et seulement si son chiffre des unités est : 0, 2, 4, 6 ou 8.

b. Un nombre est divisible par 3 si, et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

c. Un nombre est divisible par 5 si, et seulement si son chiffre des unités est : 0, ou 5.

d. Un nombre est divisible par 9 si, et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

REMARQUE

• Un nombre entier naturel est soit pair ou bien impair.

Exemple

- 234 est divisible par 2 car le chiffre des unités 4 est divisible par 2.
- 1245 est divisible par 3 car la somme de ces chiffres $1+2+4+5=12$ est divisible par 3
- 230 est divisible par 5 car le chiffre des unités est 0 .
- 12645 est divisible par 9 car $1+2+6+4+5=18$ qui est divisible par 9

2.3. Nombre pair et nombre impair

Définition :

Les nombres pairs sont les multiples de 2, ils sont $0; 2; 4; 6; 8...; 2k; 2(k+1); ...$ avec $k \in \mathbb{N}$
Un nombre pair est un nombre de la forme $2k$ avec k un entier naturel
Un nombre impair est un nombre qui n'est pas pair, il est de la forme $2k+1$ avec k un entier naturel

Exemple

- $66 = 33 \times 2$ et $33 \in \mathbb{N}$ donc 66 est un nombre pair.
- $17 = (8,5) \times 2$ mais $(8,5) \notin \mathbb{N}$ donc 17 n'est pas un nombre pair ; c'est un nombre impair
  $17 = 8 \times 2 + (0,5) \times 2 = 8 \times 2 + 1$ et $(2 \in \mathbb{N})$

Propriété:

Soient a et b deux entiers naturels avec $a > b$.

1. Si a et b sont tous les deux pairs, alors $a+b$ et $a-b$ et $a.b$ sont pairs et a^n est pair
2. Si a et b sont tous les deux impairs, alors $a+b$ et $a-b$ sont pairs et $a.b$ est impair et a^n est impair
3. Si a et impair et b est pair alors $a+b$ et $a-b$ sont impairs et $a \times b$ est pair.

Exemple

13^{15} est impair , $(12)^{15}$ est pair , $(2019)^{2020} + (2020)^{2019}$ est impair , $(2019)^{7} \times (2021)^{2020}$ est impair , $(2021)^{17} \times 2^{3}$ est pair , $(1966)^{1963} + (1968)^{1974}$ est pair et $(2010)^{4} - (2005)^{3}$ est impair

2.4. Nombre premier

Définition :

Un nombre entier naturel est premier s'il admet exactement deux diviseurs distincts, 1 et lui même.

Méthodes : pour démontrer qu'un nombre est premier; On peut utiliser deux méthodes.

Méthode 1 :

Corollaire d'érathosthène m est premier ; s'il n'est pas divisible par aucun nombre premier p avec $p \leq \sqrt{m}$

Méthode 2 :

• Le crible d'eratosthène

• Le crible d'eratosthène est un algorithme qui permet de déterminer les nombres premiers inférieurs à un nombre donné par élimination.

1. Partir du plus petit nombre premier
2. Éliminer tous ses multiples
3. Conserver l'entier suivant qui n'a pas été éliminé : il est premier.
4. Recommencer

Méthode 1 :

pour $m = 101$ on a $\sqrt{101} \simeq 10,04$ les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{101}$ sont 2 ; 3 ; 5 et 7.

Comme 101 n'est pas divisible ni par 2, ni par 3, ni par 7 alors 101 est premier.

Video

https://youtu.be/JNssbGROVL 8

Méthode 2 :

Cherchons les nombres premiers inférieurs à 100

On dresse un tableau comprenant tous les entiers de 1 à 100.
On barre 1 qui n'est pas premier, 2 est donc le premier entier premier, on élimine tous ses multiples qui selon la définition ne sont pas premiers, le premier entier qui reste est 3 qui est donc premier, on élimine tous les multiples de 3 certains ont déjà été éliminés et on recommence avec 5 puis 7.

REMARQUE

- 2 est le seul nombre premier pair.
- 1 n'est pas premier car il a un seul diviseur :
- 0 n'est pas premier car il a plus que deux diviseurs

Exemple

Déterminer parmi les nombres suivants les nombres premiers : $65; 179; 251; 247$.

- 65 n'est pas premier car il est divisible par 5 qui est différent de 1 et 65.
- Pour 179; 251; 247 on va utiliser le corollaire d'eratosthène.
- On a $\sqrt{179} \simeq 13,37$ donc les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{179}$ sont $2; 3; 5; 7; 11$ et 13 et comme 179 n'est pas divisible par aucun de ces nombres donc 179 est premier.
- On a $\sqrt{251} \simeq 15,84$; donc les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{251}$ sont $2; 3; 5; 7; 11; 13$ et comme 251 n'est pas divisible par aucun de ces nombres alors 251 est premier.
- On a $\sqrt{247} \simeq 15,71$ donc les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{247}$ sont $2; 3; 5; 7; 11; 13$; 247 est divisible par 13 et comme $13 \neq 1$ et $13 \neq 247$ donc 247 n'est pas premier.

REMARQUE

On a 25 nombres premiers inférieurs à 100 sont :
2-3-5-7-11-13-17
19-23-29-31-37
41-43-47-53-59
61-67-71-73-79
83-89 et 97

2.5. Décomposition d'un nombre entier non premier supérieur strictement à 1, en produit de facteurs premiers.

Propriété :

Tout nombre entier non premier supérieur strictement à 1 est soit un nombre premier soit il est décomposé en produit de facteurs premiers.

Exemple

$4 = 2 \times 2 = 2^2$ et $12 = 2^2 \times 3$ et $6 = 2 \times 3$ et $72 = 2^3 \times 3^2$

Propriété :

Étapes de décomposition
On cherche le plus petit nombre premier qui divise N .
On fait la division de N par ce nombre premier et si le quotient obtenu est différent de 1, on recommence…jusqu'à obtenir pour quotient 1.

Exemple

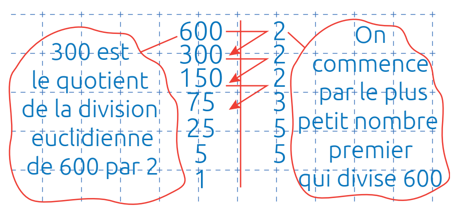
Donner la décomposition en facteurs premiers de 600 .

$600 = 2 \times 300$ $\quad$ $75 = 3 \times 25$

$300 = 2 \times 150$ $\quad$ $25 = 5 \times 5$

$150 = 2 \times 75$ $\quad$ $5 = 5 \times 1$

Donc : $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$



Vidéo

https://youtu.be/qP8vvJYg

Application :

a. Détermination de nombre de diviseurs entier naturel.

b. Détermination diviseurs d'un entier naturel

REMARQUE

- Par convention si a ou b est nul alors $PPCM(a,b) = 0$

Exemple

Quel est le nombre des diviseurs de l'entier naturel 540 ? et quels sont les diviseurs de 540 ?

La décomposition en facteurs premiers du nombre : 540 est $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$.

On écrit $(1; 2^1; 2^2)(1; 3^1; 3^2; 3^3)(1; 5^1) = (1; 2; 4)(1; 3; 9; 27)(1; 5)$

Le nombre des diviseurs de 540 est $3 \times 4 \times 2 = 24$ et pour avoir les diviseurs de 540 on développe : $(1, 2, 4)(1, 3, 9, 27)(1, 5)$

$= (1, 3, 27, 9, 2, 6, 18, 54, 4, 12, 36, 108)\ (1, 5)$

$= (1, 3, 9, 27, 2, 6, 18, 54, 4, 12, 36, 108, 5, 15, 45, 135\ 10, 30, 90, 270, 20, 60, 180, 540)$

Les diviseurs de 540 sont : 1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10;1 2; 15; 18; 20; 27; 30; 36 45; 54; 60; 90; 108; 135; 180; 270; 540

III Le plus petit commun multiple – le plus grand commun diviseur.

3.1. Le plus petit commun multiple

Définition :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Le plus petit commun multiple de a et b est le plus petit multiple commun non nul des nombres a et b On note $PPCM\ (a, b)$.

REMARQUE

- Pour $a > 0$ $PGCD(0, a) = a$
- Par convention $PGCD(0, 0) = 0$

Exemple

Les multiples du nombre 12 sont : $0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, \ldots\ldots$.
Les multiples du nombre 8 sont : $0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, \ldots\ldots$ Alors $PPCM\ (12; 8) = 24$.

3.2. Le plus grand commun diviseur

Définition :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Le plus grand commun diviseur de a et b est le plus grand diviseur commun des nombres a et b On note $PGCD\ (a, b)$.

Exemple

Les diviseur du nombre 12 sont : $1; 2, 3, 4, 6, 12$
Les diviseurs du nombre 8 sont : $0, 2, 4, 8, 32, 40, 48$. Alors $PGCD\ (12; 8) = 4$

3.3. Détermination du PGCD et PPCM; en utilisant la décomposition en produit de facteur premiers.

Propriété :

$PGCD\ (a; b)$ est le produit des facteurs premiers communs qui apparaissent dans la décomposition en facteurs premiers de a et de b, chacun est pris avec son plus petit exposant.

Exemple

Les décompositions en produit de facteurs premiers de 225 et de 540 sont respectivement :
$225 = 3^2 \times 5^2$ et $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$
$PGCD\ (225, 540) = 3^2 \times 5^1 = 45$

Propriété :

$PPCM\ (a;b)$ est le produit de tous les facteurs premiers qui apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de a et de b , chacun est pris avec son plus grand exposant.

Exemple

$225 = 3^2 \times 5^2$ et $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ donc $PPCM\ (225;540) = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 = 2700$.

Propriété : $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = a \times b$

Exemple

$PGCD(225;540) \times PPCM(225;540) = 3^2 \times 5 \times 2^2 \times 3^3 \times 5^2$

$PGCD(225;540) \times PPCM(225;540) = 3^2 \times 5^2 \times 2^2 \times 3^3 \times 5 = 225 \times 540$

3.4. Détermination du PGCD en utilisant l'algorithme d'Euclide

Propriétés :

L'algorithme d'Euclide qui est basé sur la propriété suivants : si r , est le reste de la division euclidienne de a par b alors $PGCD(a,b) = PGCD(b,r)$
L'algorithme d'Euclide est une suite d'opérations (division euclidienne), qui permet de retrouver le $PGCD$ de deux «grands» nombres en se ramenant à des nombres plus petits. Le $PGCD$ est toujours le dernier reste non nul trouvé.

Exemple (Calcul du PDGC par le tableur Exel)

La fonction Mod permet de calculer le reste de la division euclidienne

- À chaque ligne suivante :

A prend la valeur de B, B celle de r.

- Et, on recommence la division avec ces nouvelles valeurs de B et r.
- On s'arrête lorsque r est nul.

Le $PGCD$ est égal au B final.

C3 =MOD(A3;B3)

	A	B	C	D	E	F
1	Calcul du PGCD (a,b)à l'aide du Tableaur Excel					
2	A	B	r	r est le reste de la division Euclidienne de a par b		
3	2344	654	382			
4	654	382	272	continuez		
5	382	272	110	continuez		
6	272	110	52	continuez		
7	110	52	6	continuez		
8	52	6	4	continuez		
9	6	4	2	continuez		
10	4	2	0	stop	PGCD(a,b)est : 2	
11						

Vidéo

https://youtu.be/EVQY 8DG 5_es

3.5. Nombres premiers entre eux.

Définition :

Soient a et b deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux si et seulement si $PGCD(a;b) = 1$

Exemple

- 3 et 5 sont premiers entre eux car $PGCD(3,5) = 1$
- 8 et 15 sont premiers entre eux car $PGCD(8,15) = 1$

Propriété :

Si a et b sont premiers entre eux alors $PPCM(a,b) = a.b$

Exemple

$PGCD(3,5) = 1$donc $PPCM\ (3,5) = 3 \times 5 = 15$

$PGCD(8,15) = 1$donc $PPCM\ (8,15) = 8 \times 15 = 120$

LEXIQUE

- **Arithmétique :** حسابيات
- **Premier :** أولي
- **premiers entre eux :** أوليان فيما بينهما

1 Décomposition en produit des facteurs premiers

1 • Donner les décompositions en facteurs premiers de 675 et de 750.

2 • Calculer $PGCD\ (675;750)$ et en déduire $PPCM\ (675;750)$

3 • Donner la fraction irréductible égale à $\frac{675}{750}$.

4 • Recalculer $PGCD\ (675;750)$ par la méthode de l'algorithme d'Euclide.

Réponses :

1 •

675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	Donc $\boxed{675 = 3^3 \times 5^2}$

Et $750 = 75 \times 10 = 10 \times 3 \times 25 = 2 \times 3 \times 5^3$.

2 • $PGCD(675;750) = 3 \times 5^2 = 75$

et on a $PGCD(675;750) \times PPCM(675;750)$

$= 675 \times 750 = 3^3 \times 5^2 \times 2 \times 3 \times 5^3$

Donc $PPCM(675;750) = \frac{3^3 \times 5^2 \times 2 \times 3 \times 5^3}{3 \times 5^2}$

$= 3^3 \times 2 \times 5^3 = 6750$.

3 • $\frac{675}{750} = \frac{3^3 \times 5^2}{2 \times 3 \times 5^3} = \frac{3^2}{2 \times 5} = \frac{9}{10}$

4 • $750 = 675 \times 1 + 75$ et $675 = 75 \times 9 + 0$.

Donc $PCGD(675;750) = 75$.

2 Fraction irrédictible

Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

• Rendre irréductible la fraction $\frac{156}{24}$.

Réponses :

Tant que le $PGCD$ du numérateur et du dénominateur n'est pas égal à 1, alors il est possible de simplifier la fraction.

Pour la simplifier au maximum, il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur par leur $PGCD$.

Pour cela, on va calculer le $PGCD$ du numérateur et du dénominateur, c'est-à-dire : $PGCD\ (156, 24)$.

$156 = 24 \times 6 + 12$

$24 = 12 \times 2 + 0$

Le $PGCD\ (156, 24)$ est le dernier reste non nul, c'est-à-dire 12 (en caractère gras).

Pour rendre la fraction irréductible, on divise le numérateur et le dénominateur par 12 : $\frac{156}{24} = \frac{156/12}{24/12} = \frac{13}{2}$.

La fraction irréductible est $\frac{13}{2}$.

3 Application du PGCD

MAHMOUD a gagné 84 sucettes et 147 bonbons à un jeu. Étant très généreux, et ayant peur du dentiste, il décide de les partager avec des amis. Pour ne pas être égoïste, chacun doit avoir le même nombre de sucettes et le même nombre de bonbons.

1 • Combien de personnes au maximum pourront bénéficier de ces friandises (MAHMOUD étant inclus dans ces personnes !)? Expliquer votre raisonnement.

2 • Combien de sucettes et de bonbons aura alors chaque personne ?

Réponses :

1 • Devant donner le même nombre de sucettes et de bonbons par personne, le nombre de personne doit diviser 84 et 147.

Devant être maximal, c'est le $PGCD$ de 84 et 147.

En utilisant l'algorithme d'Euclide :

$147 = 84 \times 1 + 63$

$84 = 63 \times 1 + 21$

$63 = 21 \times 3 + 0$

Le $PGCD\ (147, 84) = 21$

Donc 21 personnes au maximum peuvent bénéficier des friandises.

2 • $\frac{147}{21} = 7$ il y aura donc 7 bonbons par personne

et $\frac{84}{21} = 4$ sucettes par personne

4 Nombre de diviseur

1 • Décomposer 1400 en produit de facteurs premiers.

2 • Déterminer le nombre de diviseur de 1400

3 • Écrire tous les diviseurs de 1400.

4 • Compléter par le plus petit entier naturel non nul :

$1400 \times \ldots$ est le carré d'un nombre entier.

$1400 \times \ldots$ est le cube d'un nombre entier.

Réponses :

1 • $1400 = 7\times2\times100 = 7\times2\times5\times5\times2\times2 = 2^3\times5^2\times7$

2 • Le nombre de diviseur de 1400 est $4\times3\times2 = 24$

3 • Div $(1400) = \{1;2;4;5;7;8;10;14;20;25;28;35;40;50;$

$56;70;100;140;175;200;280;350;700;1400\}$.

4 • 1400×14 est le carré du nombre entier $140(14=2\times7)$

1400×245 est le cube du nombre entier $70(245=5\times7\times7)$

5 Pair et impair

Soit x et y deux entiers naturels tels que : $2^{x-2}+7^{2y+1}+6^x = 16844$. Avec $x\geq2$

On veut Montrer que $x = 2$

Supposant que $x\neq2$ donc $x\geq3$

1 • Montrer que : $2^{x-2}(1+4\times3^x) = 16844 - 7^{2y+1}$

2 • En déduire que $16844 - 7^{2y+1}$ est à la fois pair et impair.

3 • Conclure que $x = 2$ (un tel raisonnement s'appelle raisonnement par l'absurde)

4 • Déterminer la valeur de y.

Réponses :

1 • On a : $2^{x-2}+7^{2y+1}+6^x = 16844$
donc $(2^{x-2}+2^x\times3^x) = 16844 - 7^{2y+1}$

D'où $(2^{x-2}+2^{x-2}\times2^2\times3^x) = 16844 - 7^{2y+1}$
par suite $2^{x-2}(1+4\times3^x) = 16844 - 7^{2y+1}$

2 • Comme $x\geq3$
alors $16844 - 7^{2y+1} = 2\times(2^{x-3}(1+4\times3^x))$,
donc $(16844 - 7^{2y+1})$ est pair, et comme $(16844 - 7^{2y+1})$ est la différence d'un nombre pair et d'un nombre impair donc c'est un nombre impair.

3 • Si on suppose que, $x\neq2$ alors et comme x est un entier supérieur au égal à 2 alors $x\geq3$
donc $(16844 - 7^{2y+1})$ sera pair et impair;
absurde donc $x = 2$

4 • On a $x = 2$, donc $16807 = 7^{2y+1}$, la décomposition en produit de facteur premier donne $16844 = 7^5$; donc $2y+1 = 5$ par suite $y = 2$.

6 $\sqrt{5}$ n'est pas une fraction irréductible

1 • Montrer que pour tous entier naturel a le nombre $a(a+1)$ est pair

2 • On suppose que $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers naturels premiers entre x .

a. Montrer que p et q sont deux entiers impairs.

b. On pose $p = 2a+1$ et $q = 2b+1$ avec a et b deux entiers naturels.

Montrer que $5b(b+1) = a(a+1)-1$

c. En déduire que $a(a+1)-1$ est à la fois un entier pair et impair

3 • Que peut - on conclure ?

Réponses :

1 • On a : $a(a+1)$ est le produit de deux entiers naturels consécutifs donc l'un est pair et l'autre est impair, leur produit est donc pair.

D'ou $a(a+1)$ est pair.

2 •

a. Si $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ alors $5q^2 = p^2$.

Si p est pair alors q est pair et si q est pair alors p est pair ce qui est impossible car p et q sont premiers entre eux.

Donc p et q sont deux entiers impairs.

b. On a $p = 2a+1$ et $q = 2b+1$ et comme $5q^2 = p^2$

alors $5(2b+1)^2 = (2a+1)^2$

par suite $5(4b^2+4b+1) = 4a^2+4a+1$

$5(4b^2+4b)+5 = 4a^2+4a+1$

D'ou : $5(4b^2+4b) = 4a^2+4a-4$

Donc $5(b^2+b) = (a^2+a-1)$

par suite $5b(b+1) = a(a+1)-1$

c. D'après la 1ère question $a(a+1)$ est pair

donc $a(a+1)-1$ est impair et comme $b(b+1)$ est pair alors $5b(b+1)$ est pair et donc $a(a+1)-1$ est pair par suite $a(a+1)-1$ est à la fois pair est impair.

3 • $a(a+1)-1$ est à la fois pair et impair est impossible donc la proposition $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers premiers entre eux est fausse.

Exercices d'application

1

1 • Déterminer les nombres entiers pairs et les nombres entiers impairs. Parmi les nombres suivants : 2 ; 5 ; 6 ; 378 ; 425 22×15; 4×16; $3 \times 15 \times 6$; $301 \times 15 \times 7$.

2 • Soient n, x et y des entiers naturels tel que $x = 6n + 2$ et $y = 4n + 3$

a. Déterminer la parité de x et y.

b. Montrer que $x + y$ est un multiple de 5.

3 • Soit n un entier naturel :

a. Montrer que $(n + 2)(n + 3)$ est pair.

b. Déduire la parité de $n^2 + 5n + 7$

2

1 • Donner les diviseurs de 12

2 • Donner les diviseurs de 45.

3 • Donner les multiples de 5 inférieurs ou égales à 44.

4 • Donner les multiples de 7 inférieurs à 127.

3

1 • Recopier et compléter les phrases suivantes par «diviseur» ou par «multiple» :

48 est un .... de 8.

72 est un .... de 36.

25 est un .... de 100.

1 est un .... de 3.

6 est un .... de 2.

4 Donner une écriture en langage mathématique des phrases suivantes :

1 • a est un multiple de 2.

2 • b est un nombre impair.

3 • m est un multiple de n.

4 • d est un diviseur de n.

5 • 2 appartient à $\mathbb{N}$

6 • $\sqrt{2}$ n'est pas un entier naturel.

5 On considère la série des entiers naturels :

2; 0; 3;15;7;25; 39;40;3,5;9,8;56;13;75;57;32;23;15402;11111

1 • Déterminer les nombres de la série qui sont divisibles par 2.

2 • Déterminer les nombres de la série qui sont divisibles par 3

3 • Déterminer les nombres de la série qui sont divisibles par 5

4 • Déterminer les nombres de la série qui sont divisibles par 9

5 • Déterminer les nombres de la série qui sont des diviseurs communs de 9 et 5 et 2

6

1 • Montrer que 109 est premier.

2 • Déterminer les diviseurs de 327

3 • Déterminer tous les entiers naturels n et m tel que : $n^2 - mn = 327$

7

1 • Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres : 82 - 103 - 343 - 511 - 801.

2 • En déduire $PPCM$ (82 - 801) et $PGCD$ (343 - 511)

8 A l'aide de la méthode de votre choix, calculer le $PGCD$ et $PPCM$ de :

1 • 88 et 132 **2 •** 65 et 170 **3 •** 66 et 180

9 Les nombres suivants sont-ils premiers entre eux ?

1 • 73 et 85

2 • 68 et 94

3 • 121 et 120

4 • 95 et 35

10 Écrire les fractions suivantes sous forme irréductibles : $\frac{27}{75}$ $\frac{122}{64}$ $\frac{36}{48}$ $\frac{93}{27}$

Exercices d'approfondissement

11 On a les deux nombres entiers naturels $x = 2 \times 5 \times 7^2$ et $y = 2^2 \times 3 \times 11$

1 • Sans effectuer aucun calcul, expliquer pourquoi le nombre $2^4 \times 5^3 \times 7^8$ est un multiple de x, puis que le nombre $2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7^2 \times 11^2$ est un multiple de y.

2 • En utilisant une écriture qui fera intervenir les puissances des nombres premiers, proposer la forme générale que prendra les multiples de x et les multiples de y.

3 • En utilisant une écriture qui fera intervenir les puissances des nombres premiers, donner la forme générale que prendra les multiples communs de x et de y.

4 • En déduire le $PPCM$ de x et de y

12 **On a les entiers:** $a = 2^3 \times 5 \times 7^2$, $b = 2^2 \times 3^4 \times 11$, $c = 2^4 \times 3^2 \times 5^3$ **et** $d = 3 \times 5^2 \times 7^3$.

1 • **Déterminer** les $PPCM$ des nombres entiers : a et b ; a et c ; a et d ; b et c ; b et d ; c et d

2 • **Déterminer** les $PGCD$ des nombres entiers : (a et b) ; (a et c) ; (a et d) ; (b et c) ; (b et d) ; (c et d)

13

1 • **Donner** la décomposition en produit de facteurs premiers des deux nombres 168 et 86.

2 • **Déterminer** le nombre de diviseurs de 198 et tous les diviseurs de 168.

3 • **Déterminer** le nombre de diviseurs de 86 et tous les diviseurs de 86.

4 • Quels sont les diviseurs communs à 168 et 86 ?

5 • Quel est le $PGCD$ de 168 et 86 ?

14 **Soit n un entier naturel**

1 • **Montrer** que : $2n^2 + 6n + 8$ est un nombre pair et que $4n^2 + 10n + 7$ est un nombre impair.

2 • **Montrer** que : $n(n+1)$ est un nombre pair.

3 • **Montrer** que la somme de deux entiers naturels consécutifs est un nombre impair.

4 • **Montrer** que le carré d'un nombre impair est un nombre impair, et que le carré d'un nombre pair est un nombre pair.

En déduire que (pour tout entier naturel n) : (n^2 et n ont la même la parité).

15 **Soit n un entier naturel.**

1 • **Montrer** que : $B = n^2 + 3n + 3$ est impair et que $C = 5n^2 + n$ est pair.

2 • **Donner** la valeur de
$D=(n+2)\times(-1)^{5n^2+n}+(n-3)\times(-1)^{n^2+3n+3}$

16 **Déterminer les entiers naturels n dans les cas suivants :**

1 • $\dfrac{6}{n-2} \in \mathbb{N}$

2 • $\dfrac{n+9}{n-1} \in \mathbb{N}$

3 • $\dfrac{3n+13}{n+1} \in \mathbb{N}$

4 • $\dfrac{n^2+5n+18}{5+n} \in \mathbb{N}$

17

1 • **Vérifier** que pour tout entier n :
$n^2 + 4n + 9 = (n+3)(n+1) + 6$

2 • **Déterminer** toutes les valeurs n tel que le nombre $(n+3)$ divise $n^2 + 4n + 9$

18 **Soit n un entier naturel.**

1 • **Montrer** que : $3n^2 + 15n + 7$ est un nombre impair.

2 • **Montrer** que : $5n^2 - 7n + 4$ est un nombre pair.

3 • **Montrer** que : $(2n+1)(2n+3) + 5$ est un nombre pair.

4 • **Montrer** que : $n^4 - n^2 + 16$ est un multiple de 4

19 **Parmi Onze pièces, six sont normales d'un poids M inconnu; alors que les cinq autres sont plus lourdes d'une unité.**

On dispose d'une balance électronique .

Comment savoir si une pièce choisie au hasard est normale ou contrefaite ?

20

1 • En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer $PGCD$ $(375;345)$ et en déduire $PPCM$ $(375;345)$.

2 • **Écrire** la forme irréductible de la fraction $\dfrac{345}{375}$.

3 • **Donner** les décompositions en produit de facteurs premiers des nombres 375 et 345.

4 • En déduire de nouveau $PGCD$ $(375;345)$ et $PPCM$ $(375;345)$

5 • **Donner** le nombre de diviseurs de 345 et déterminer ces diviseurs.

21

1 • **Déterminer** les diviseurs de 22 et les diviseurs 20 et les diviseurs de 120

2 • **Déterminer** tous les entiers naturels n et m tels que $m \times n = 22$.

3 • **Déterminer** tous les entiers naturels n et m tels que $9n^2 = m^2 + 20$.

4 • **Déterminer** tous les entiers naturels n et m tels que $n^2 - 2m \times n = 120$

22

1 • **Déterminer** les diviseurs de 33.

2 • **Déterminer** tous les entiers naturels n et m tel que $mn + 2m + n = 31$.

3 • Le nombre 437 est-il premier ? Justifier votre réponse.

4 • **Déterminer** tous les couples $(x;y)$ tels que : $x^2 - y^2 = 437$ avec $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$.

23

1 • **Montrer** que $2600 = 2^3 \times 5^2 \times 13$ et que : $1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

2 • **Écrire** la forme irréductible de la fraction $\frac{1260}{2600}$.

3 • **Calculer** $PGCD\ (1260;2600)$ et $PPCM\ (1260;2600)$

4 • **Donner** le nombre de diviseurs de 1260.

5 • **Déterminer** le plus petit entier non nul k tel que $2600\,k$ soit un carré

24

1 • **Montrer** que 107 est un nombre premier.

2 • **Donner** les décompositions en facteurs premiers de 2568 et de 5400.

3 • En déduire $PGCD\ (2568;5400)$ et $PPCM\ (2568;5400)$

4 • **Déterminer** le plus petit entier naturel non nul k tel que $(5400 \times k)$ soit un carré.

5 • **Simplifier** $\sqrt{5400}$ et $\frac{5400}{2568}$.

6 • **Donner** le nombre de diviseurs de 5400.

25 Deux voitures A et B partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit.

La voiture A fait le tour du circuit en $36\,min$ et la voiture B fait le tour du circuit en $30\,min$.

1 • Y-a-t-il des moments (autre que le départ) ou les deux voitures se croisent sur la ligne de départ ?

2 • **Calculer** le nombre de tours effectuées par chaque voiture à la première rencontre.

26 Pour décorer une grande salle de réception, maître Mahmoud dispose de 182 brins de muguet et de 78 roses.

Il veut faire des bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs.

1 • Combien de bouquets identiques maître Mahmoud pourra-t-il faire ?

2 • Quelle sera la décomposition de chaque bouquet ?

27 Économie - optimisation

1 • **Déterminer** le $PGCD$ de 186 et 155 par les deux méthodes :

a. Méthode 1 : (Utiliser l'algorithme d'Euclide)

b. Méthode 2 : (Utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers)

2 • Un chocolatier a fabriqué 186 pralines et 155 chocolats.

Les colis sont constitués ainsi :

- Le nombre de pralines est le même dans chaque colis.
- Le nombre de chocolats est le même dans chaque colis.
- Tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés.

a. Quel nombre maximal de colis pourra-t-il réaliser ?

b. Combien y aura-t-il de chocolats et de pralines dans chaque colis ?

28

1 • Sans calculer leur $PGCD$, dire pourquoi les nombres 648 et 972 ne sont pas premiers entre eux.

2 • **Calculer** $PGCD\ (972;648)$.

3 • En **déduire**, l'écriture irréductible de la fraction $\frac{648}{972}$.

4 • **Prouver** que : $\sqrt{648} + \sqrt{972} = 18(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

29

1 • **Donner** la décomposition en produit de facteurs premiers les deux nombres $a = 6209$ et $b = 4435$.

2 • **Calculer** $PGCD\ (a;b)$.

3 • En déduire, que les nombres a et b ne sont pas premiers entre eux.

4 • **Donner** l'écriture irréductible de la fraction : $\frac{a}{b}$.

5 • **Déterminer** le plus petit entier non nul k tel que $a \times n$ soit un carre parfait.

6 • **Simplifier** les nombres : $\sqrt{a}$; $\sqrt{b}$; $\sqrt{ab}$

7 • **Déterminer** tous les entiers naturels dont le carrée divise 6209

30 Le but de l'exercice est de montrer que : $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction irréductible.

1 • **Monter** que si n est pair alors n^2 est pair.

2 • **Monter** que si n est impair alors n^2 est impair.

3 • En déduire que n et n^2 ont la même parité.

4 • Supposant que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, avec n et m deux entiers naturels premiers entre eux.

a. Montrer que n^2 est pair, puis en déduire que $n = 2k$ avec k un entier naturel.

b. Montrer que $m^2 = 2k^2$, puis en déduire que m est aussi pair.

c. Montrer que n et m ne sont pas premiers entre eux.

5 • Que peut –on conclure ?

31 Économie

1 • Un confiseur reçoit une commande de caramels d'un montant de $1204dh$. Pour fidéliser son client, il décide d'accorder une remise de 20%. Calculer le montant de la facture après remise.

2 • Quelques jours plus tard, le confiseur répartit 301 caramels et 172 chocolats dans des sachets identiques.

a. Calculer le nombre maximal de sachets réalisables.

b. Calculer le nombre de caramels et le nombre de chocolats contenus dans un sachet.

32

On pose $X = 9^{n+2}+9^n\times 19\,(n\in\mathbb{N})$, et $Y = 3^{n+3}+3^n\,(n\in\mathbb{N})$

1 • **Montrer** que le nombre X est divisible par 20.

2 • **Donner** la décomposition de X en produit de facteurs premiers

3 • **Montrer** que le nombre Y est divisible par 14.

4 • **Donner** la décomposition de Y en produit de facteurs premiers

33 Le but de l'exercice est de montrer que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

1 • **Monter** que si 3 divise n^2 alors 3 divise n.

2 • Supposant que $\sqrt{3} = \frac{n}{m}$, avec n et m deux entiers naturels premiers entre eux.

a. Montrer que 3 divise n^2, puis en déduire que $n = 3k$ avec k un entier naturel.

b. Montrer que $m^2 = 3k^2$, puis en déduire que 3 divise m.

c. Montrer que n et m ne sont pas premiers entre eux.

3 • Que peut –on Conclure ?

34 Soit a et b deux entiers naturels ; avec $a > b$.

1 • **Montrer** que si d divise a et d divise b alors d divise $a - b$.

2 • En déduire que deux nombres entiers naturels impairs consécutifs sont premiers entres eux.

35 On pose : $a = 2^3\times5^2+2^5\times5$ et $b = 2^2\times3^{2021}+2^3\times3^{2021}$

1 • **Donner** la décomposition en facteurs premiers des deux entiers a et b.

2 • **Calculer** $PGCD\ (a;b)$ et $PPCM\ (a;b)$.

3 • **Déterminer** le plus petit dénominateur commun puis calculer la somme : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

36 Un agriculteur a un champ rectangulaire de longueur $1125m$ et de largeur $216m$.

Pour diversifier les plantations il pense à subdiviser le champ en carrés identiques les plus grands possibles de façon à ne pas avoir de perte. La longueur du côté des carrés est un entier naturel de mètres.

1 • Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?

2 • Combien obtiendra - t - il de carrés dans son champ ?

37 On vent résoudre le système : $\begin{cases} a\times b = 1715 \\ PGCD(a;b) = 7 \end{cases}$

On pose $a = 7x$ et $b = 7y$ avec x et y deux entiers naturels.

1 • **Montrer** que si d est un diviseur commun de x et y alors d est un diviseur commun de a et b.

2 • En déduire que x et y sont premiers entre eux.

3 • Montrer que $xy = 35$

a. Décomposer le nombre 35 en produit de facteurs premiers.

b. En déduire les valeurs possibles de x et y

c. Résoudre le système $\begin{cases} a.b = 1715 \\ PGCD(a,b) = 7 \end{cases}$

38 Dans un lycée ; il y a 986 élèves garçons et 408 filles.

On veut former des classes mixtes de telle qu'il y ait le même nombre de garçons dans chaque classe, et le même nombre de filles dans chaque classe.

On veut bien que tous les élèves soient dans des classes.

1 • Quel est le nombre maximal de classes pouvant être formées ?

2 • Donner alors la composition de chaque classe.

39 Soit n un entier naturel non nul $(n \in \mathbb{N}^*)$

On considère les deux nombres a et b

$a = 4n + 5$ et $b = 3n + 4$ et d un diviseur commun du deux nombres a et b

1 • Montrer que $d/(n+1)$

2 • En déduire que a et b sont premier entre eux

3 • Application :

Montrer que 4005 et 3004 sont premiers entre eux .

40 Soit n un entier naturel.

On pose $a = \dfrac{n^2 - 5n + 6}{n^2 + 6}$

1 •

a. Vérifier que $n^2 - 5n + 6 = (n-2)(n-3)$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $5n \leq n^2 + 6$

2 • Montrer que : $a = 1 - \dfrac{5n}{n^2 + 6}$

3 • Déterminer tous les entiers naturels n tels que a soit un entier naturel.

41 Soit n un entier naturel. et $A(n) = 4n^2 + 1$

1 • Vérifier que $A(n) = (2n^2 + 1)^2 - (2n)^2$

2 • Factoriser $A(n)$

3 • Application :

Montrer que 2501 est un nombre premier.

42 Diviseur propre et Entiers Amicaux

On appelle diviseur propre d'un entier naturel , tout diviseur de cet entier autre que 1 et lui-même

Deux entiers naturels m et n sont dits amicaux lorsque :

- La somme des diviseurs propres de m est égale à n ,
- Et la somme des diviseurs propres de n est égale à m .

1 • Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres 220 et 284

2 • Montrer que 220 et 284 sont amicaux.

43 On se propose de déterminer tous les couples d'entiers naturels (x, y) tels que : $PGCD(x, y) = 56$ et $PPCM((x, y)) = 672$.

1 • Démontrer qu'il existe deux entiers naturels a et b premiers entre eux tels que : $x = 56a$ et $y = 56b$ et $ab = 12$

2 • Déterminer tous les couples (a, b) .

3 • Déterminer tous les couples (x, y) solutions du problème.

44 Un terrain rectangulaire a pour dimension $156m$ et $90m$

On veut l'entourer d'une clôture de fil de fer soutenue par des piquets régulièrement espacés,un piquet étant planté à chaque angle du terrain.

Sachant que deux piquets consécutifs doivent être distants d'un nombre entier de mètres et situés à plus de 2 mètres et à moins de 5 mètres l'un de l'autre.

- **Calculer** le nombre de piquets à prévoir.

45 Cryptographie et TICE

On assimile les lettres de l'alphabet $A, B, C, \ldots\ldots X, Y$ et Z aux nombres $0, 1, 2, \ldots.. 23, 24$ et 25 et on code ces nombres par la fonction de « Hachage » $f : x \longmapsto f(x)$ ou $f(x)$ est le reste de la division euclidienne de $15x + 2$ par 26.

Voici quelques consignes pour utiliser le tableur EXCEL :

- Entrer $A, B, C, \ldots\ldots, Z$ dans les cellules $A2$ à $A27$; nommer « lettre » la plage de cellules $A2 : A27$.
- Entrer 0 et 1 dans les cellules $B2$ et $B3$;sélectionner ces deux cellules, puis tirer la poignée de recopie vers le bas jusqu'à la cellule $B27$;les valeurs $2, 3, \ldots\ldots 25$ seront alors entrées dans les cellules $B4, B5, \ldots\ldots, B27$.
- Saisir dans la cellule $C2$ la formule =Mod $(15 * B2 + 2; 26)$ (elle retourne le reste de la division euclidienne de $15 * B2 + 2$ par 26),puis tirer la poignée de recopie vers le bas jusqu'à la cellule $C27$.
- Saisir dans cellule $D2$ la formule =INDEX($A$2:$A$27;1+C2) (elle retourne le contenu de la cellule qui se trouve dans la colonne A ; à la ligne dont le numéro est « 1 + C 2 »).

1 • Coder (VIVE LE MAROC).

2 • Décoder (VSEQC MCLCD)

Cocher la ou les réponses justes :

	A	B	C
1 $2^2 \times 3^4 \times 11^5$ est multiple de :	6 ☐	44 ☐	14 ☐
2 4 est un diviseur de :	$2^2 \times 3^4 \times 11^5$ ☐	$3^4.5^4.7^3$ ☐	$2 \times 6^4 \times 11^5$ ☐
3 6231 est un multiple de :	9 ☐	3 ☐	2 ☐
4 9 Divise :	779 ☐	7776 ☐	99213467 ☐
5 9 Divise :	$2^2 \times 5^4 \times 13^5$ ☐	$2^2 \times 3^4 \times 11^5$ ☐	$2^3 \times 3^5 \times 11^5$ ☐
6 Un entier m est premier si :	La somme des unités de m est divisible par 9 ☐	Il a exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}$ ☐	m est un entier impair ☐
7 Si p est premier et $p > 2$ Alors :	p^2 est premier ☐	p^2 est impair ☐	$p + 1$ est impair ☐
8 Deux nombres impairs sont toujours premiers entre eux:	Vrai ☐	Faux ☐	On ne peut pas savoir ☐
9 Si n est pair alors pour tous entier naturel k : $(n+3)^k - (n)^k$ est :	Pair ☐	Impair ☐	On ne peut pas savoir ☐
10 Si $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $b = 2^2 \times 3^3 \times 7$ alors	$PGCD(a,b) = 2^2 \times 3^2 \times 5$ ☐	$PGCD(a,b) = 2^3 \times 3^3$ ☐	$PGCD(a,b) = 2^2 \times 3^2$ ☐
11 Si $x = 2^2 \times 5^2 \times 7$ et $y = 6 \times 5^3 \times 7$ alors :	$PPCM(x,y) = 2 \times 5^2$ ☐	$PPCM(x,y) = 7$ ☐	$PPCM(x,y) = 2^2 \times 5^3 \times 3 \times 7$ ☐

AUTO - FORMATION

46 **Soit n un nombre entier.**

1 • **Développer** : $(n+1)^2 - n^2$

2 • **Quelle** est la parité du résultat obtenu (Ce résultat est-il pair ou impair)

3 • En **déduire** que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence des carrés de deux entiers naturels consécutifs.

4 • **Écrire** les nombres : 5 ; 13 et 21 sous forme d'une différence de carrés de deux entiers naturels consécutifs.

5 • **Calculer** la somme :

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 2015 + \ldots + 2021 + 2023$

47 **Soient x, y et z trois entiers naturels.**

Montrer que si 6 divise $x + y + z$ alors 6 divise $x^3 + y^3 + z^3$.

Petit problème :

Hajar a un nombre pair de pièces dans une main et un nombre impair de pièces dans l'autre main. Afin de deviner dans quelle main se trouve le nombre pair de pièces, Mahmoud lui dit : «Multiplie le nombre de pièces de ta main droite par deux, ajoute-le au nombre de pièces de ta main gauche et donne-moi le résultat.»

FICHE DE REMÉDIATION

Objectif **Remédier aux difficultés liées à :**
- Notions : pair, impair.
- Diviseurs et multiples d'un entier.

Activités de remédiation aux difficultés	Remédiation	Critères et indicateurs
1 a est pair donc $a = 2$ b est impair donc $b = 3$	a est pair donc $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$	Revoir la définition d'un entier pair et d'un entier impair.
2 1 est premier	1 n'est pas premier car il a seulement un seul diviseur entier naturel	Un nombre entier naturel est premier s'il a exactement deux diviseurs entiers naturels
3 0 est à la fois pair et impair	0 est pair 0 n'est pas impair	Revoir la définition d'un entier pair et d'un entier impair
4 Soit a et b deux entiers naturels si $a.b = 8$ alors $a = 8$ ou $b = 8$	Si a et b deux entiers naturels et $a.b = 8$ alors a et b sont deux diviseurs de 8 dont le produit est 8	L'existence d'un diviseur de a donne naissance à un autre diviseur de a

Auto-remédiation

Voir corrigé p 281

1 **Soit a un entier naturel pair et b est impair donc a et b un entier naturel impair.**

Montrer que $a + b$ est impair et que $a.b$ est pair.

2 **Soit a et b deux entiers naturel tels que :** $a.b = 20$

Déterminer les valeurs de a et de b.

Évasion culturelle

LES NOMBRES PREMIERS

Très tôt, dès les premiers partages de jouets ou de, on apprend que certains nombres entiers, tel 6= 2x 3, se« cassent » aisément en deux friandises facteurs. En revanche, on n'arrivera jamais à décomposer ainsi les nombres 2, 5, 7, etc. Ces nombres sont nommés premiers

La première trace incontestable de la présentation des nombres premiers remonte à l'Antiquité (vers 300 av. J.-C.), et se trouve dans les Éléments d'Euclide (livres VII à IX). Euclide donne une définition des nombres premiers, la preuve de leur infinité, la définition du plus grand commun diviseur (pgcd) et du plus petit commun multiple (ppcm), et les algorithmes pour les déterminer, aujourd'hui appelés algorithmes d'Euclide. Il est possible que les connaissances présentées soient antérieures.