Programme Marocain - BIOF

1 BAC
Sc.Économique

ETINCELLE MATHS

Manuel de l'élève

Auteurs

HASSAN KHALKALLAH
Professeur de maths
Cycle secondaire qualifiant
(Coordinateur)

MOHAMED RAHNAOUI
Ex. Inspecteur principal
de l'enseignement secondaire

MOHAMED MOUSSADDAR
Professeur de maths
Cycle secondaire qualifiant

SALAH DIOUA
Professeur de maths
Cycle secondaire qualifiant

SOMMAIRE

Outils et fiches ressources

LEÇON 1

Notion de logique

Compétences visées

- Utiliser le raisonnement convenable selon la situation étudiée ;
- Rédiger des raisonnements mathématiques et des démonstrations claires et logiquement correctes ;
- Étudier la vérité d'une proposition logique.
- Comprendre le sens d'une proposition logique et donner sa négation.

Prérequis

- Propositions ; opérations sur les propositions ;
- Fonctions propositionnelles les quantificateurs.
- Les raisonnements mathématiques : raisonnement par l'absurde ;
- Raisonnement par contraposée;
- Raisonnement par disjonction des cas raisonnement par équivalence ;
- Raisonnement par récurrence.

Prolongements

- Utiliser les notions logiques et rédiger des raisonnements et démonstrations mathématiques logiquement correctes.

JE VÉRIFIE MES ACQUIS

Dans chacun des cas suivants indiquer la bonne réponse :

	A	B	C
1 Le nombre $2n^2 + 4n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$ est :	Pair	Impair	Somme de 3 carrés
2 $\sqrt{3}$ est un :	Nombre rationnel	Un entier naturel	Un nombre irrationnel
3 L'expression $x^2 + 1 \geq 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ est :	Vraie	Fausse	N'a pas de sens
4 L'équation $x^2 - x + 1 = 0$ admet :	2 solutions	Pas de solutions	Une seule solution
5 $\sqrt{5}$ est solution de l'équation	$x^2 - \sqrt{5} = 0$	$x^2 - 5 = 0$	$x^2 + 5 = 0$
6 La somme de deux nombres impairs est un nombre :	Pair	Impair	Premier
7 Le double d'un nombre irrationnel est un nombre	Entier	Rationnel	Irrationnel
8 135 est divisible par 3	Faux	On ne sait pas	Vrai
9 $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{5}$	Vrai	Faux	On ne peut pas conclure
10 L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble :	Des entiers relatifs	Des entiers naturels	Des entiers rationnels

1 On considère les énoncés suivants :

Tout nombre pair est divisible par 2;

$\sqrt{3} \in \mathbb{N}$;

3 est un nombre premier ;

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$;

et $\pi \in Q$.

1 • **Recopier** les énoncés (ci-dessus) et mettre un V devant chacun des énoncés "vrai" et un F devant chacun des énoncés "faux".

2 • **Donner** d'autres exemples des énoncés qui peuvent être vrais ou bien faux.

A retenir :

Chaque énoncé qui peut être ou bien "vrai" ou bien "faux" est appelé une proposition et les valeurs V et F sont appelées les valeurs de vérité.

2 Recopier les énoncés suivants et mettre à la place des pointillés l'un des liens suivants "ou" ou bien "et"

1 • $x^2 - 4 = 0$ signifie $x = 2 ...... x = -2$

2 • $ABCD$ est un parallélogramme signifie $AB = DC ...... AD = BC$

3 • Soient a et b deux réels on a $|a-b| = a-b ... |a-b| = b-a$

4 • Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^+$ on a : $x^2 = a$ signifie $x = \sqrt{a} ...... x = -\sqrt{a}$

5 • Si n est un entier naturel alors n est pair… n est impair.

6 • $|x| = 4$ signifie $x = 4 ...... x = -4$.

3 Le professeur de mathématique Madame Asmaa a donné à ses élèves le tableau suivant :

• **Recopier** et compléter le tableau ci-dessous.

	Énoncé	Valeur de vérité de l'énoncé	La négation de l'énoncé
1	$\sqrt{2} \in Q$		
2	$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$		
3	$a \in \mathbb{R} : \sqrt{a^2} \geq a$		
4	$\sqrt{7} = \sqrt{3} + \sqrt{4}$		
5	Le nombre 425625 est un multiple de 25		

4 **Déterminer, parmi les énoncés suivants ceux qui sont vrais.**

1 • Si ABC est un triangle alors $AB + BC > AC$.

2 • Si ABC est un triangle alors les points A, B et C sont alignés.

3 • Si $\sqrt{5}$ est nombre rationnel alors 5 est un carré parfait.

5 **Soit** $n \in \mathbb{N}^*$

On considère l'expression $A(n) = n^2 - 7n + 6$.

1 • Calculer $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, $A(5)$ et $A(6)$.

2 • Est ce qu'on peut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

On a $A(n) \leq 0$

3 • Calculer $A(7)$.

4 • L'énoncé suivant est-il vrai ou faux : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $A(n) \leq 0$.

Remarque :

La valeur 7 est appelée un contre exemple.

6

1 • Que peut on dire de l'énonce pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 < 0$.

2 • Soit $a \in \mathbb{R}^*$ supposons que $a + \frac{1}{a} < 2$ montrer que $(a - 1)^2 < 0$.

3 • Que peut on conclure ?

7

1 • Vérifier que : $2^3 > 3$

2 • Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que :

Si $2^n \geq n$ alors $2^{n+1} \geq n + 1$

3 • En déduire sans faire de calcul que $2^4 > 4$ et $2^5 > 5$ et $2^6 > 6$.

4 • Donner la valeur de vérité de l'énonce pour tout entier naturel $n \geq 3$: $2^n \geq n$ (Justifier ta réponse).

A retenir :

Ce raisonnement est appelé raisonnement par récurrence

I Proposition ou assertion

1.1. Définition :

- Une proposition ou une assertion est un énoncé mathématique qui a un sens qui est soit vrai soit faux
- Une proposition est notée par : $p, q, s, r\dots$
- On affecte a une proposition vraie le nombre 1 ou la lettre V et on affecte a une proposition fausse le nombre O ou la lettre F

  V et F sont appelées les valeurs de vérités

Table de vérité de P

P	V	F

Exemple

p: 2 est un nombre pair V ;

q: $2+7 \neq 9$ F

x est un nombre impaire, cette phrase ne représente pas une proposition.

1.2. Fonction propositionnelle.

- Une fonction propositionnelle est un énoncé mathématique dépendant d'une (ou de plusieurs) variables appartenant à un ensemble E, sa valeur de vérité dépend de la variable ou des variables de E.

  On note une fonction propositionnelle par $P(x)$, $A(x,y)$

Exemple

$p(x): x \in \mathbb{R}^* / x^2 \geq x$.

$Q(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $x^2 + y^2 \geq 6xy$.

II Connecteurs logiques

2.1. Négation d'une proposition

Soit p une proposition

La négation de p est la proposition noté $\overline{p}$ ou non (p) qui est vraie si p est fausse et fausse si p est vraie

La table de vérité de $\overline{p}$

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Exemple

p : $2 > \sqrt{2}$; (1)

$\overline{P}$: $2 \leq \sqrt{2}$; (0)

q : 4 ne divise pas 116 ; (0)

$\overline{q}$ 116 est divisible par 4 ; (1)

2.2. Conjonction

La conjonction des deux propositions p et q est la proposition noté $p \wedge q$ ou (p et q) définie par la table de vérité ci-contre

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Remarque :

La proposition $p \wedge q$ est vraie si p et q sont à la fois vraies.

Exemple

(3 est impair) et ($\sqrt{3} \notin Q$) : (1) ; $2 + 4 + 6 = 3 \times 4$ et $3 \times 4 \neq 12$: (0)

2.3. Disjonction

La disjonction des deux propositions p et q est la proposition noté $p \vee q$ ou (p ou q) définie par la table de vérité ci-dessous

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Remarque :

La proposition $p \vee q$ est fausse si les deux propositions p et q sont simultanément fausse .

Exemple

$9 + 6 = 15$ ou $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$: (1) . $\sqrt{5} \in \mathbb{N}$ ou $\sqrt{9} = -3$: (0)

2.4. Implication

L'implication des deux propositions p et q dans cet ordre est la proposition noté $p \Rightarrow q$ et se lit p implique q définie par la table de vérité ci dessous

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

REMARQUE

• Pour montrer que $p \Rightarrow q$ est vraie, on doit supposer que p est vraie et monter que q est vraie

Remarque :

La proposition $p \Rightarrow q$ est fausse uniquement si p est vraie et q est fausse.

Exemple

$x > 1 \Rightarrow x^2 > x$: (1); 4 est un nombre pair $\Rightarrow \frac{1}{4} \in N$: (0); $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5} \Rightarrow$ 5 est premier : (1)

2.5. Équivalence

L'équivalence des deux propositions p et q est la proposition noté $p \Longleftrightarrow q$ et on lit p équivalent a q ou p si et seulement si q définie par la table de vérité suivante :

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Remarque :

La proposition $p \Longleftrightarrow q$ est vraie si p et q ont simultanément la même valeur de vérité .

Exemple

$\sqrt{3^2+4^2}=7 \Leftrightarrow 7$ est impair : (0) $\quad 5>2 \Leftrightarrow 2+3=5$: (1) $\quad \sqrt{2}>\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{16}=-4$: (1)

III Les quantificateurs.

Il y a deux quantificateurs, le quantificateur universel, noté $\forall$ et se lit quelque soit ou pour tout et le quantificateur existentiel noté $\exists$ et se lit il existe au moins : on a $(\forall x \in E): P(x)$ quelque soit x de E on a : $P(x)$ et $\exists x \in E: P(x)$ il existe au moins un x de E tel que : $P(x)$.

Exemple

$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$ $\quad \exists x \in \mathbb{R}/x^2 - 3x + 2 = 0$ $\quad \exists! x \in \mathbb{R} \;\; x^2 - 4x + 4 = 0$

Remarque :

- $\exists!$ Se lit il existe un et un seul
- On peut permuter des quantificateurs de même nature mais on ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes
- La négation de : $(\forall x \in E): P(x)$ est : $\exists x \in E: \overline{P(x)}$ et la négation de : $(\exists x \in E): P(x)$ est : $(\forall x \in E): \overline{P(x)}$

Exemple

p : $\forall n \in \mathbb{N}^* / \; n^2 \geq n$ $\quad q$: $\exists x \in \mathbb{R}/x^2 + 1 > x$

$\overline{p}$: $\exists n \in \mathbb{N}^* / \; n^2 < n$ $\quad \overline{q}$: $\forall x \in \mathbb{R}/x^2 + 1 \leq x$

IV Les lois logiques ou tautologies.

Définition :

Une loi logique est une proposition formée de plusieurs propositions p, q, r... liées entre elles par des connecteurs logiques et qui est toujours vraie quelque soit la valeur de vérité des propositions p, q, r ...

Exemple

Montrer que $p \Rightarrow q \Longleftrightarrow \overline{p}$ ou q est une loi logique.

p	q	$\overline{p}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p}$ ou q	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p}$ ou q
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

D'après la table de vérité précédente on a :
$(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{p}\, ou\, q)$ est toujours vraie donc c'est une loi logique.

REMARQUE

Les lois logiques $\overline{p \text{ ou } q} \Leftrightarrow \overline{p} \text{ et } \overline{q}$ et $\overline{p \text{ et } q} \Leftrightarrow \overline{p} \text{ ou } \overline{q}$ sont appelés les lois de morgan

Propriété :

Les propositions suivantes sont des lois logiques :
- $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{p} \text{ ou } q)$
- $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
- $(\overline{p \text{ et } q}) \Longleftrightarrow (\overline{p} \text{ ou } \overline{q})$
- $(\overline{p \text{ ou } q}) \Longleftrightarrow (\overline{p} \text{ et } \overline{q})$

V Les types de raisonnements.

5.1. Raisonnement par contre exemple.

Pour montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : P(x)$ est fausse, il faut est il suffit de montrer que sa négation est vraie c'est à dire : $\exists x_0 \in \mathbb{R} / \overline{P(x_0)}$ est vraie le réel x_0 est appelé "contre exemple" .

▸ **Exemple**

• **Montrer que la proposition suivante est fausse**.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 5x + 4 > 0$ Il suffit de prendre $x_0 = 2$ on a : $2^2 - 5 \times 2 + 4 = -2 < 0$

5.2. Le raisonnement par équivalences successives.

Propriété :

On a : $[p \Leftrightarrow q \text{ et } q \Leftrightarrow r] \Rightarrow p \Leftrightarrow r$ est une loi logique.

▸ **Exemple**

• **Soit $x > 0$ montrer que $x + \frac{1}{x} \geq 2$**

On a $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Longleftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2$ et $\frac{x^2+1}{x} \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x$ car $x > 0$

Et $x^2 + 1 \geq 2x \Longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$ et $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

Et comme $(x-1)^2 \geq 0$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$

Alors $x + \frac{1}{x} \geq 2$ est aussi vraie $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque :

Si $p \Longleftrightarrow r$ est vraie et r est vraie alors p est vraie

REMARQUE

• On a

$A \cup \overline{A} = E$

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

A et B sont deux parties disjointes si $A \cap B = \varnothing$

5.3. Le raisonnement par disjonction de cas.

Rappel :

Soit E un ensemble non vide et $A \subset E$ on note par $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E c'est à dire $\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$.

• Pour montrer qu'une propriété $P(x)$ est vraie pour tout x de E.
Il faut et suffit de montrer que $P(x)$ est vraie pour tout x de A et de montrer que $P(x)$ et vraie pour tout x de $\overline{A}$. on peut aussi décomposer E en plusieurs parties disjointes deux à deux et dont la réunion de toutes les parties est égale à E .

▸ **Exemple**

• **Soit $n \in \mathbb{N}$ montrer que $n^2 + n$ est pair**

Réponse :

On peut distinguer deux cas n pair et n impair si n est pair alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et on a :
$n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k$

$n^2 + n = 2(2k^2 + k)$ et $2k^2 + k \in \mathbb{N}$ donc $n^2 + n$ est pair

Si n est impair on a $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$

et $n^2 + n = (2k+1)^2 + 2k + 1 = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1)$ et $2k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{N}$

Donc $n^2 + n$ est pair.

5.4. Le raisonnement par l'absurde

Remarque :

D'après la table de vérité de l'implication $V \Rightarrow F$ est une proposition fausse donc si $\overline{P} \Rightarrow Q$ est vraie et si Q est fausse alors $\overline{P}$ sera forcement fausse donc P est vraie.

- Donc pour montrer qu'une proposition P est vraie on suppose que $\overline{P}$ est vraie et on montre que $\overline{P} \Rightarrow Q$ avec Q est une proposition fausse. On conclut que P est vraie.

Exemple

- **Soit $a \notin Q$ montrer que** $2 + a \notin Q$

Réponse :

Supposons que $2 + a \in Q$ donc il existe $b \in Q$ tel que $2 + a = b$

Donc $a = b - 2$ et comme $2 \in Q$ et $b \in Q$ alors $a = b - 2 \in Q$ ce qui est absurde puisque $a \notin Q$ donc $2 + a \notin Q$

REMARQUE

$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ est appelée l'implication contraposée de $p \Rightarrow q$

5.5. Le raisonnement par contraposée

Propriété :

On a $p \Rightarrow q \Longleftrightarrow \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ est une loi logique donc :

Pour montrer que $p \Rightarrow q$ est vraie il faut et il suffit de montrer que $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ est vraie

Exemple

Soit a et b deux réels tels que $b \neq 0$ et $a + 2b \neq 0$ **montrer** que $\frac{a}{b} \neq -3 \Rightarrow \frac{a-2b}{a+2b} \neq 5$

Supposons que $\frac{a-2b}{a+2b} = 5$: on a $\frac{a-2b}{a+2b} = 5 \Rightarrow a - 2b = 5a + 10b$

et $a - 2b = 5a + 10b \Rightarrow -4a = 12b$ et $-4a = 12b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{12}{-4} = -3$, d'où $\frac{a}{b} \neq -3 \Rightarrow \frac{a-2b}{a+2b} \neq 5$

REMARQUE

Pour montrer $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ on doit supposer que $P(n)$ est vraie et montrer que $P(n+1)$ est vraie

5.6. Le raisonnement par récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, La propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} P(n_0) \textit{ est vraie} \\ \textit{et pour } n \geq n_0 \\ \textit{on a} : (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \text{ est vraie} \end{cases}$

Exemple

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $n(n+1)$ est un nombre pair

- Pour $n = 0$ on a $n(n+1) = 0$ vraie

Soit $n \in N$, supposons que : $n(n+1)$ est pair et montrons que : $(n+1)(n+2)$ est paire.

On a : $(n+1)(n+2) = n(n+1) + 2(n+1)$ somme de deux nombres pairs est pair

et par suite $\forall n \in \mathbb{N}$ $n(n+1)$ est un nombre pair .

LEXIQUE

- **Absurde :** خلف
- **Négation :** نفي
- **Contraposée :** مضاد للعكس

1 Valeur de vérité

Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

1 • $2+4+6+8=4\times 5$.

2 • 425 est divisible par 25.

3 • $a^2+b^2=(a+b)^2$.

4 • $\mathbb{N}$ est un ensemble fini.

5 • $\sqrt{5}\leq\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

6 • Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

7 • Tout les nombres pairs sont divisibles par 4.

Réponses :

1	2	3	4	5	6	7
V	V	F	F	V	V	F

2 Négation

Nier les propositions suivantes

$P_1 : \exists x\in\mathbb{R}\ \ x^2-7x+12=0$.

$P_2 : \forall x\in\mathbb{R}\ \ x^2+1>0$.

$P_3 : (\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/xy=1$.

$P_4 : \forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall y\in\mathbb{R}\ \ x^2+y^2\neq 1$.

$P_5 : \forall x\in\mathbb{R}\ \ 2<x<5$.

$p_6 : \forall x\in\mathbb{R}^{+}\exists p\in\mathbb{N}/p\leq x<p+1$.

$p_7 : \forall n\in\mathbb{N}\ \ \exists m\in\mathbb{N}/m=4n$.

Réponses :

On a :

$\overline{P_1} : \forall x\in\mathbb{R} : x^2-7x+12\neq 0$

$\overline{P_2} : \exists x\in\mathbb{R} : x^2+1\leq 0$

$\overline{P_3} : \exists x\in\mathbb{R}\ \ \forall y\in\mathbb{R}\ \ xy\neq 1$

$\overline{P_4} : \exists x\in\mathbb{R}\ \ \exists y\in\mathbb{R}/x^2+y^2=1$

$\overline{P_5} : \exists x\in\mathbb{R}/x\leq 2$ ou $x\geq 5$

$\overline{P_6} : \exists x\in\mathbb{R}^{+}\ \ \forall p\in\mathbb{N} : x<p$ ou $x\geq p+1$

$\overline{P_7} : \exists n\in\mathbb{N}\ \ \forall m\in\mathbb{N} : m\neq 4n$

3 Les quantificateurs

Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes.

P : il existe au moins un réel m tel que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $m\leq x$

q : Pour tout réel m il existe au moins un réel x tel que $x^2-mx-m^2=0$

r : Il existe un réel e, pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $x+e-xe=x$

Réponses :

$P : \exists m\in\mathbb{R}/\forall x\in\mathbb{R}\ \ m\leq x$

$q : \forall m\in\mathbb{R}\ \ \exists x\in\mathbb{R}/x^2-mx-m^2=0$

$r : \exists e\in\mathbb{R}\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ \ x+e-xe=x$

4 Raisonnement par contre exemple

Montrer par un contre exemple que la proposition suivante est fausse.

1 • $\forall p\in\mathbb{N}^*\ \ p^2+2p+3$ est premier

Réponses :

1 • Pour $p=1$ on a $p^2+2p+3=6$ et 6 est non premier donc la proposition : $\forall p\in\mathbb{N}^*\ \ p^2+2p+3$ est premier est fausse.

5 Raisonnement par contraposée

1 • Soient x et y deux réels montrer que : $x+y>c\Rightarrow 2x>c$ ou $2y>c$

Réponses :

On sait que $(p\Rightarrow q)\Longleftrightarrow(\overline{q}\Rightarrow\overline{p})$.

1 • On a :

Non $(2x>c$ ou $2y>c)\Rightarrow 2x\leq c$ et $2y\leq c$ (P_1).

$(P_1)\Rightarrow 2x+2y\leq c+c$ (P_2).

$(P_2)\Rightarrow 2(x+y)\leq 2c$ (P_3).

$(P_3)\Rightarrow x+y\leq c$ (P_4).

$(P_4)\Rightarrow$ Non $(x+y>c)$.

D'où $x+y>c\Rightarrow 2x>c$ ou $2y>c$.

6 Raisonnement par disjonction des cas

1 • Soit $n\in\mathbb{N}$

Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3

Réponses :

1 • Raisonnons par disjonction de cas :

1er cas : $n = 3k(k \in \mathbb{N})$

Donc $n(n+1)(n+2) = 3k(3k+1)(3k+2) \ = 3h$

Avec $h = k(3k+1)(3k+2) \in \mathbb{N}$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.

2ème cas : $n = 3k+1(k \in \mathbb{N})$

On a : $n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3)$

$= 3(3k+1)(3k+2)(k+1)$

$= 3h$

Avec $h = (3k+1)(3k+2)(k+1) \in \mathbb{N}$

Donc $n(n+1)(n+1)$ est divisible par 3

3ème cas : $n = 3k+2$

On a $n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4)$

$= 3(3k+2)(k+1)(3k+4) \ = 3h$

Avec $h = (3k+2)(k+1)(3k+4) \in \mathbb{N}$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3 et par suite :

$\forall n \in \mathbb{N} \ \ n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3

7 Raisonnement par récurrence

Montrer par récurrence

1 • $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2 • $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{3^{2n+1} + 2^{n+2}}{7} \in \mathbb{N}$

Réponses :

1 • Pour $n = 1$

On a : $1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons par $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

et montrons que : $1 + 2 + ... + n + n + 1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

On a : $1 + 2 + ... + n + n + 1 =$

$\dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1$

$= \dfrac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$

$= \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

Donc d'après le principe de récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2 • Pour $n = 0$ on a : $\dfrac{3^1 + 2^2}{7} = 1 \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $\dfrac{3^{2n+1} + 2^{n+2}}{7} \in \mathbb{N}$ et montrons

Que $\dfrac{3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2}}{7} \in \mathbb{N}$

En effet : $\dfrac{3^{2n+1} + 2^{n+2}}{7} \in \mathbb{N}$

Donc $\exists k \in \mathbb{N} / \dfrac{3^{2n+1} + 2^{n+2}}{7} = k$

C'est à dire : $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$

Et on a :

$3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} =$

$= 3^{2n+1} \times 3^2 + 2^{n+2} \times 2$

$= 3^{2n+1} \times 9 + 2^{n+2} \times 2$

$= 3^{2n+1}(7+2) + 2^{n+2} \times 2$

$= 2^{2n+1} \times 7 + 3^{2n+1} \times 2 + 2^{n+2} \times 2$

$= 7 \times 3^{2n+1} + 2(3^{2n+1} + 2^{n+2})$

$= 7 \times 3^{2x+1} + 2 \times 7k$

$= 7(3^{2n+1} + 2k) = 7h$

Avec $h = 3^{2n+1} + 2k$, on a $h \in \mathbb{N}^*$

Donc $\dfrac{3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2}}{7} \in \mathbb{N}$

Et par suite $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{3^{2n+1} + 2^{n+2}}{7} \in \mathbb{N}$

8 Loi logique

1 • Dresser la table de vérité de $(\overline{p\ ou\ q}) \Leftrightarrow (\overline{p}\ et\ \overline{q})$.

2 • En déduire que $(\overline{p\ ou\ q}) \Leftrightarrow (\overline{p}\ et\ \overline{q})$ est une loi logique

Réponses :

1 •

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	p ou q	$p\ \overline{ou}\ q$	$\overline{p}$ et $\overline{q}$	$\overline{p\ ou\ q} \Leftrightarrow \overline{p}$ et $\overline{q}$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

2 • D'après la question 1) on peut remarquer que :

$\overline{p\ ou\ q} \ \Leftrightarrow\ \overline{p}$ et $\overline{q}$ est toujours vraie quelque soit les valeurs de vérité de p et de q .

Donc $p\ \overline{ou}\ q \Leftrightarrow\ \overline{p}$ et $\overline{q}$ est une loi logique (c'est l'une des deux lois de Morgan).

Exercices d'application

1 **Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies**

1 • 3 divise 234 ou 3 est premier

2 • 10 est un carré parfait ou $2 + 8 < 7$

3 • $121 = 11^2$ et tout les nombres pairs sont divisibles par 4

4 • $\forall x \in \mathbb{R} : (x \neq 1$ ou $x \neq 4)$

5 • $(\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 1)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 4)$

6 • $(\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R} / x^2 = 16)$

7 • $(\exists x \in \mathbb{R} \ (x^2 - 1 = 0$ et $x^2 = 16)$

2 **Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses**

1 • $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x \geq y$

2 • $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x \geq y$

3 • $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x \geq y$

4 • $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x \geq y$

3 **Nier chacune des propositions suivantes :**

1 • $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x \geq y$

2 • $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \in]0, 1[: \forall x \in \mathbb{R} \quad : |x| < \alpha \Rightarrow x^2 < \varepsilon$

3 • p et $(q$ ou $r)$

4 • p ou $(q$ ou $r)$

5 • $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > x^2$

4 **Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes**

1 • Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$: $\exists p \in A / \forall n \in A \; n \geq p$

2 • $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : n^2 + n + 1 < \varepsilon$

3 • $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 6 \Rightarrow x > 2$

4 • $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \geq 0$ ou $a \leq 0$

5 • $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} : x \geq y$ ou $y \geq x$

6 • $\forall a > 0 \quad \forall b > 0 : \sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

5 **Montrer à l'aide d'un contre exemple que chacune des propositions suivantes est fausse**

$p_1 : \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^2 + n + 3$ est premier

$P_2 : \forall x \in \mathbb{R} \quad : x^2 \geq x$

$P_3 : \forall x \in \mathbb{R} \quad : x^2 - 4x + 4 > 0$

$P_4 : \forall x \in \mathbb{R} \quad : n^3 + n^2 + n - 1 > 0$

6 **Soit a et b deux réels positifs :**

• **Montrer** que :

$a + b = 0 \Rightarrow a = 0$ *et* $b = 0$

7

1 • **Montrer** que : $\forall (x, y) \in (R^*{}_+)^2$

$y \mp -\frac{4}{5} x \Rightarrow \frac{x - y}{x + y} \mp 9$

2 • **Montrer** que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : x \mp 9 \Rightarrow \frac{x + 9}{6} \mp \sqrt{x}$

3 • **Montrer** que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$

4 • **Montrer** que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \forall y \in \mathbb{R}^* :$

$(x \mp 1)$ ou $(y \mp 1) \Rightarrow \frac{x + y}{2} \mp \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1$

8 **Monter par raisonnement de disjonction de cas que :**

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n(2n^2 + 1)$ est divisible par 3

9

1 • **Montrer** que : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} : x + \frac{16}{x} \geq 8$

2 • **Montrer** que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

3 • **Montrer** que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{4} x^2 + 1 \geq x$

10

1 • Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que n est un multiple de 3 $\Longleftrightarrow n^2$ est un multiple de 3

2 • **Montrer** par absurde de que $\sqrt{3} \notin Q$

11 **Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes**

1 • $|2x - 4| + |4x - 12| = 6$ 2 • $|x - 6| - |5x - 10| = 12$

12 **Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ montrer que :**

$x \neq y \Rightarrow (x - 2)(y + 2) \mp (x + 2)(y - 2)$.

13 **Soient a et b deux réels strictement positifs.**

• **Montrer** que : $a \leq b \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{a + b} \leq b$

14 **Montrer que** $\forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{x^2+1} - x \geq 0$ (disjonction des cas)

15 **Soit** $m \in \mathbb{R}$

- **Discuter** suivant la valeur de m, les solutions de l'équation $x^2 + 1 = m$

16

1 • **Étudier** le signe de $m^2 - 5m + 4 (m \in \mathbb{R})$

2 • En déduire suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $x^2 + 4mx + 20m - 16 = 0$

17

1 • **Montrer** que : $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 10 > 0$

et $x^2 + 3x + 6 > 0$ et $x^2 + 2x + 8 > 0$

2 • En **déduire** que : $(\forall x \in \mathbb{R}) |x - 2| < x^2 + 2x + 8$

18

1 • **Montrer** que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2 • **Montrer** que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1+3+5+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$

19

1 • **Montrer** que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(12)^n - 1$ est divisible par 11

2 • **Montrer** que $\forall n \in \mathbb{N}$, $9^n + 5^n - 2$ est divisible par 4

20

- **Montrer** que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2^n \geq n$

21 **Soit** $x \in \mathbb{R}$

- **Montrer** que : $|x - 2| < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{11} < \frac{1}{x+2} < \frac{2}{5}$

22 **Déterminer parmi les propositions suivantes les quelles sont vraies .**

1 • 2 divise 2022 et 1 est un nombre premier .

2 • $\sqrt{3} < 3$ et $\sqrt{9} = 3$.

3 • $2 + 4 = 2 \times 3$ ou 5 est pair .

4 • Le produit de deux entiers naturels est négatif ou $-1 \in \mathbb{N}$.

5 • Soit $n \in \mathbb{N}$: $n^2 > 0 \Longrightarrow n + 1 < 0$

23 **Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :**

1 • $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$

2 • $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 > 0$

3 • $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 4 = 0$

4 • $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 27 = 0$

5 • $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists k \in \mathbb{Z}$ / $n + 2k$ est pair .

24 **Nier chacune des propositions suivantes :**

1 • $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x - x^2 > 0$

2 • $\exists x \in \mathbb{R}\mathbb{N}$, $1 + n + n^2$ est un carré parfait .

3 • $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ / $x - y = 1$

4 • $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ / $n \geqslant x$

25 **Soit** a **et** b **deux réels positifs**

- **Montrer** que : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0 \Longrightarrow a = 0$ et $b = 0$

26

1 • Soit $x \in \mathbb{R}^+$

Montrer que : $x \neq 12 \Longrightarrow \frac{x-4}{x+4} \neq \frac{1}{2}$

2 • Soit $x \in \mathbb{R}^+$

Montrer que : $x \neq 4 \Longrightarrow \frac{x+4}{4} \neq \sqrt{x}$.

3 • Soit x et y deux réels strictement positifs .

Montrer que : $y \neq 3x \Longrightarrow \frac{y-x}{y+x} \neq \frac{1}{2}$.

27

1 • Soit a et b deux réels .

- **Montrer** que : $a^2 + b^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$ et $b = 0$

2 • En déduire pour tout réels positifs x et y .

$x \neq 4$ ou $y \neq 4 \Longrightarrow \frac{x+y}{4} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2$.

28 **Soit** $n \in \mathbb{N}$

1 • **Montrer** que si n est pair alors n^2 est pair .

2 •

a. **Montrer** que n impair $\Longrightarrow n^2$ est impair .

b. En déduire par contraposée que : n^2 est pair $\Longrightarrow n$ est pair .

3 • Que peut on conclure ?

29 **Soit p et q deux entiers naturels / $q \neq 0$ et $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible .(C'est à dire $\frac{p}{q}$ ne peut pas être simplifiée) .supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.**

1 • **Montrer** que p est pair .

2 • Posons $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Montrons que q est pair .

3 • Que peut on conclure pour $\frac{p}{q}$.

4 • **Utiliser** le raisonnement précédente pour montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

30 **Soit $n \in \mathbb{N}^*$**

• **Montrer** par disjonction de cas que $n(n+1)$ est pair .

31 **Soit $n \in \mathbb{N}^*$**

• **Montrer** par disjonction de cas $n(n+1)(n+2)(n+3)$ un multiple de 4 .

32 **Soit $n \in \mathbb{N}$**

• **Montrer** que n et $n^2 + 1$ ont une parité différentes .

33 **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x - 5| = 5$.**

34 **Montrer par récurrence que :**

1 • $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 5 + 9 + \ldots\ldots + 4n + 1 = (n+1)(2n+1)$.

2 • $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 + 4 + 6 + \ldots\ldots + 2n = n(n+1)$.

Exercices d'approfondissement

35 **Soit $a \in \mathbb{R}$**

• **Montrer** que : $|a| \leq 1 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + a^2 = 0$

36 **Soit $n \in \mathbb{N}$**

• **Montrer** que $n^2 + 3n + 2$ est un nombre pair

37 **Soit $a \in \mathbb{R} - \{1\}$**

• **Montrer** par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

38 **Soient a et b deux réels montrer que :** $a^2 + b^2 + 1 \geq 2ab - 2a + 2b$

39

1 • **Montrer** que :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $7^n + 13^n + 19^n - 3$ est divisible par 6

2 • **Montrer** que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$

40

1 • Soit $n \in \mathbb{N}^*$

• **Montrer** que : $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$

2 • Soit $n \in \mathbb{N}^*$

• **Montrer** que $3^n \geq 1 + 2n^2$

41 **Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes**

1 • $|x^2 - 7x + 12| = 6$

2 • $x^2 + 2|x - 2| - 4 = 0$

3 • $|x - 3| = 2x + 4$

42

1 • **Montrer** que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\frac{x^2 + 4}{4} \geq |x|$

2 • **Montrer** que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$x \neq 4$ et $y \neq 4 \Rightarrow xy + 16 \neq 4x + 4y$

3 • **Montrer** que : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

43

1 • **Montrer** que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$

$x \neq 1$ ou $y \neq 1 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2 + 2}{2} \neq x + y$

2 • **Montrer** que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$

$|x| \neq |y| \Rightarrow \frac{x^4 + y^4}{2} \neq (xy)^2$

44

1 • **Montrer** que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2 • En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

45 **Soit** $n \in \mathbb{N}^*$

Posons $a_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

- **Montrer** que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$1 \times a_1 + 2 \times a_2 + \ldots + n \times a_n = a_{n+1} - 1$

46 **Soient a, b et c trois réels vérifiant :**

$$\begin{cases} a = 0 \Rightarrow b > 0 \\ a > 0 \Rightarrow b < 0 \\ b \neq 0 \Rightarrow c > 0 \end{cases}$$

- **Déterminer** le signe de ces réels sachant que l'un d'eux est strictement positif, le deuxième est strictement négatif et le dernier est nul.

47 **Soit** $n \in \mathbb{N}$

1 • **Montrer** par disjonction de cas que $n(n+1)$ est pair

2 • En **déduire** que : $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par $8 \Rightarrow n$ est pair

48

1 • **Montrer** que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3n) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{2}$

2 • **Montrer** que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$2 + 6 + 10 + \ldots + (4n + 2) = 2(n+1)^2$

49 **Soit** $b \in \mathbb{R}$

- **Montrer** que : $\forall \varepsilon > 0 \quad |b - 1| < \varepsilon \Rightarrow b = 1$

50 **Soit a un nombre réel $a > 1$.**

1 • **Montrer** par absurde que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad na \geq 1$

2 • **Montrer** par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ ; (a+1)^n > n$

3 • En déduire que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $3^n + 4^n + \ldots 2022^n > 2020n$

51 **Recopier et compléter les pointillés par l'un des connecteurs logique suivants $\Rightarrow$, ou $\Leftrightarrow$.**

1 • $x \in \mathbb{R}$; $x^2 = 9 \ldots\ldots x = 3$

2 • $x \in \mathbb{R}^+$; $x^2 = 4 \ldots\ldots x = 2$

3 • $x \in \mathbb{R}$; $x \geq 1 \ldots\ldots x^2 \geq x$

4 • $x \in \mathbb{R}$; $|x| = 1 \ldots\ldots x = 1$ ou $x = -1$

52

1 • Soit n et p deux entiers naturels non nuls et de parité différente .

- **Montrer** que $n + p$ est impair .

2 • **Montrer** par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^2 + n + 1$ est impair .

53 **Soit a un réel strictement positif .**

- **Montrer** que par l'absurde le triangle de cotés $4a$, $5a$, $6a$ n'est rectangle .

54 **Soit x et y deux réels strictement positifs .**

- **Montrer** que : $y \neq \dfrac{2x}{x+1} \Longrightarrow \dfrac{2x+1}{y+2} \neq \dfrac{x}{y}$.

55 **Montrer que chacune des propositions suivantes est vraie .**

1 • P_1 : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x + 6 > 0$.

2 • P_2 : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2x^2 + x + 1 \neq 0$.

3 • P_3 : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 3n + 3$ est un entier naturel impair .

56

1 • **Nier** chacune des propositions suivantes :

P_1 : $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x + 1 < 0$.

P_2 : $\exists x \in \mathbb{R} \quad 3x^2 - x + 3 = 0$.

P_3 : $\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 3n + 2$ est impair .

2 • En déduire que les propositions P_1, P_2 et P_3 sont tous foursses .

57 **Déterminer parmi les propositions suivantes celles qui sont vraies .**

P_1 : 144 est pair et $2 \times 4 \times 0 = 0$

P_2 : $2 + 3 = 2 \times 3$ et $1 \times 7 = 7$

P_3 : 8 est premier et 5 est pair .

P_4 : $1 + 2 + 3 = 3 \times 2$ ou 3 est premier .

P_5 : $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ ou 4 est pair .

P_6 : 3 divise 28 ou $\dfrac{2+5}{2} = 3$.

58 **Montrer par récurrence que :**

1 • $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 5 + 9 + \ldots\ldots + (4n+1) = (n+1)(2n+1)$.

2 • $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 7 + 13 + \ldots\ldots + (6n+1) = (n+1)(3n+1)$.

59 **Montrer par récurrence que :**

1 • $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 4 + \ldots\ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

2 • $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + 9 + \ldots\ldots + 3^n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$.

60 **Montrer par récurrence que :**

1 • $\forall n \in \mathbb{N}$, $9^n - 1$ est divisible par 8 .

2 • $\forall n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par 6 .

61 **Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P(n) = 8^n + 15^n - 2$.**

1 • Vérifier que $P(1)$ est divisible par 7 .

2 • Soit $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que :
$P(n+1) = 7(8^n + 2 \times 15^n) + P(n)$.

3 • En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$ est divisible par 7 .

62 **Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes .**

• P_1 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$

• P_2 : $\exists x \in \mathbb{R}$ / $x^2 - 4 = 0$

• P_3 : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{n}{4} \in \mathbb{N}$

• P_4 : $\forall n \in \mathbb{N}$ / $4n + 3$ est pair .

• P_5 : $\exists x \in \mathbb{R}$ / $x^2 - 7x + 12 = 0$

• P_6 : $\exists x \in \mathbb{R}$ / $x^2 + x + 5 > 0$

• P_7 : $\exists x \in \mathbb{R}$ / $x^2 + 2x + 9 \leqslant 0$

63 **Écrire à l'aide de quantifications chacune des propositions suivantes :**

• P_1 : Certains réels sont strictement inférieurs à leur carré .

• P_2 : Aucun entier non nul ni supérieur strictement à son carré .

• P_3 : Le carré de tout réel est positif .

• P_4 : Entre deux entiers consécutif, existe au moins un réel .

64

• **Montrer** que : $\forall x \in [-3, 3]$, $3\sqrt{2} > \sqrt{9 - x^2}$

65 **Montrer par récurrence que :**

1 • $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots\ldots\ldots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

2 • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3 • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 2^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

66

• **Montrer** par disjonction de cas que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - 2| \leq x^2 - x + 2$.

67

• **Montrer** par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

68

1 • Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $3 \times 4^n + 15$ est divisible par 9

2 • En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9 .

69

• **Montrer** par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11 .

70 **Soit a et b deux réels strictement positifs .**

• **Montrer** que : $a \leqslant b \Longrightarrow a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$.

71 **Soit a et b deux réels strictement positifs .**

• **Montrer** que : $a \leqslant b \Longrightarrow a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$.

72 **Soit a et b deux réels strictement positifs .**

• **Montrer** que : $a \leqslant b \Longrightarrow \frac{2}{b} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqslant \frac{2}{a}$.

73 **Soit $n \in \mathbb{N}$.**

1 • Montrer que n est pair $\Longrightarrow n^2$ est pair .

2 • En déduire que n^2 est impair $\Longrightarrow n$ est impair .

3 • Montrer que n est impair $\Longrightarrow n^2$ est impair .

4 • En déduire que n^2 est pair $\Longrightarrow n$ est pair .

5 • Que peut on conclure ?

74

1 • Soit x un réel strictement positif ;

• **Montrer** que $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

2 • Soit a et b deux réel strictement positif ;

• **Montrer** que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.

75 Soit a et b deux réel ;

• **Montrer** que $a \neq 3$ et $b \neq 3 \Longrightarrow \frac{ab}{3} \neq a + b - 3$.

76 Soit p et q deux propositions .

1 • **Nier** la propositions $\overline{p}$ et q .

2 • En déduire la négation de $p \Longrightarrow q$.

3 • **Nier** la propositions p suivante .

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \Longrightarrow 3$ divise 15 .

4 • **Justifier** par deux façons différente que la proposition p est vraie .

77 Soit x et y deux nombres réels ;

• **Montrer** que $x \neq y$ et $xy \neq 1 \Longrightarrow \frac{x}{x^2 + 1} \neq \frac{y}{y^2 + 1}$.

78 Soit $x \in \mathbb{R}$

• **Montrer** que $x \neq 2\sqrt{2}$ et $x \neq -2\sqrt{2} \Longrightarrow \frac{3}{\sqrt{1 + x^2}} \neq 1$.

79

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ $|x| + |x - 2| = 4$.

80

• **Montrer** par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $12^n + 23^n - 2$ est divisible par 11 .

81

• **Montrer** par disjonction de cas que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $|x - 3| \leq x^2 - x + 3$.

82

1 • **Étudier** le signe de $x^2 - 9$ dans un tableau .

2 • En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 > 9 \Longrightarrow x > 3$ ou $x < -3$.

83 Soit a , b deux réels .

1 • **Montrer** par absurde que $a^2 + b^2 = 0 \Longrightarrow a = b = 0$.

2 • Soit $x \in \mathbb{R}$ montrer que :

$x^2 + y^2 + 4 = 2\left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}\right) \Longrightarrow x = y = 0$.

84 Montrer par disjonction de cas que les propositions suivantes sont vraies .

1 • $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$

2 • $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{x^2 + 4x + 9} + x + 2 > 0$

85 Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques .

1 • $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p}\ ou\ q$

2 • $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p\ et\ \overline{q}$

3 • $\overline{p\ ou\ q} \Leftrightarrow \overline{p}\ et\ \overline{q}$

4 • $\overline{p\ et\ q} \Leftrightarrow \overline{p}\ ou\ \overline{q}$

5 • $[p \Leftrightarrow q\ et\ q \Leftrightarrow r] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

86 Soit $(a, b) \in R^2$.

a. **Montrer** qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + c^2$.

b. En déduire que $a^2 + ab + b^2 > 0$.

87

Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$: $a > b \Longleftrightarrow a^3 > b^3$.

88 Soit n et m deux entières naturels non nul .

1 • **Montrer** que $n^2 + mn + m^2 \neq 1$. (par l'absurde) .

2 • En déduire que $n^3 - n = m^3 - m \Longrightarrow n = m$.

3 • **Montrer** que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n^3 - n$ pair .

89 Montrer par récurrence :

1 • $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 + 6 + 36 + \ldots + 6^n = \frac{1}{5}(6^{n+1} - 1)$.

2 • $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 + 8 + 64 + \ldots + 8^n = \frac{1}{7}(8^{n+1} - 1)$.

3 • $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 + 8 + 15 + \ldots + (7n + 1) = \frac{(n + 1)(7n + 2)}{2}$.

90 **Soit f la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par $f(0) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n+1) = 2f(n)$.**

1 • **Montrer** par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = 2^n$.

2 • Soit : $S_n = f(0) + f(1) + \ldots + f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

montrer que $S_n = 2^{n+1} - 1$.

91

1 • **Montrer** que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 + 2 + \ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2 • **Montrer** que :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1^3 + 2^3 + \ldots\ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots\ldots + n)^2$.

92 **Soit $a \in \mathbb{R}$ et (p) la proposition suivante : $\exists x \in \mathbb{R}$ / $x^2 + ax + a^2 = 0$.**

1 • **Nier** la proposition (p) .

2 • **Montrer** que la proposition (p) est fausse .

3 • En déduire que l'équation $x^3 = a^3$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$.

93 **Soit p et q deux proposition .**

1 • **Montrer** que : $(p \Leftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(\overline{p} \text{ ou } q) \text{ et } \overline{q} \text{ ou } p]$.

2 • **Donner** la négation de la proposition $p \Longleftrightarrow q$

3 • **Nier** la proposition $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$xy = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$

94 **Montrer par récurrence que :**

1 • $\forall n \in \mathbb{N} \quad (2022)^n - 1$ est divisible par 2021 .

2 • $\forall n \in \mathbb{N} \quad 8^n \geqslant 1 + 7n$.

3 • $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^{3n} - 3^n$ est divisible par 5 .

95 **Soit a , b , x et y des réels strictement positifs .**

1 • **Montrer** que : $x < y \Longleftrightarrow \dfrac{x}{y} < \dfrac{ax + by}{bx + ay} < \dfrac{y}{x}$.

2 • En déduire que : $\dfrac{2}{5} < \dfrac{2a + 5b}{5a + 2a} < \dfrac{5}{2}$.

96 **Montrer que :**

1 • $\forall n \in \mathbb{N}$

$1 + 11 + 21 + \ldots\ldots + (10n + 1) = (n+1)(5n+1)$.

2 • $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + 10 + 10^2 + \ldots\ldots + 10^n + \dfrac{1}{9}(10^{n+1} - 1)$.

97 **Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :**

1 • $|2x - 4| + |x - 1| = 3$.

2 • $|x| + |x - 1| + |x + 3| = 10$.

3 • $|2x - 1| - |x - 2| = 3$.

98 **Soit P l'ensemble des proposition, on définit l'application $f : P \longrightarrow \{0, 1\}$ tel que $\forall p \in P$.**

- Si p est vraie alors $f(p) = 1$.
- Si p est fausse alors $f(p) = 0$.

1 • **Montrer** que $\forall p \in P \begin{cases} f(p) + f(\overline{p}) = 1 \\ f(p) \times f(\overline{p}) = 0 \end{cases}$.

2 • **Dresser** la table de vérité de $(p \text{ et } q)$ et $(p \text{ ou } q)$ dans un même tableau .

3 • **Montrer** que : $f(p \text{ et } q) = f(p) \times f(q)$ et $f(p \text{ ou } q) = f(p) + f(q) - f(p) \times f(q)$.

99 **Soit f la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par : $f(0) = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N} \quad f(n+1) = 5f(n)$.**

1 • **Calculer** $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$.

2 • **Montrer** par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = 5^{n+1}$.

3 •

a. **Montrer** par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + 5 + 5^2 + \ldots\ldots + 5^n = \dfrac{1}{4}(5^{n+1} - 1)$.

b. En déduire en fonction de n l'expression de $f(0) + f(1) + f(2) + \ldots\ldots\ldots + f(n)$.

100 **Soit $n \in \mathbb{N}$ montrer que :**

1 • $n^3 - n$ est divisible par 6 .

2 • $n^5 - n$ est divisible par 30 .

3 • $n^7 - n$ est divisible par 42 .

101 **Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes**

1 • $|x - 1| + |x| - 2 = 0$

2 • $|2x - 4| = |x - 1| + 1$

Cocher la ou les réponses justes :

	A	B	C
1 L'énoncé suivant : $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 - x + 4 > 0$ est :	Vrai ☐	Faux ☐	Ni vrai ni faux ☐
2 La négation de la proposition $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R} / y > x$ est :	$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} / y \leq x$ ☐	$\exists x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\; y \leq x$ ☐	$C. \exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\; y \leq x$ ☐
3 Écrire en utilisant les quantificateurs la phrase suivante : tout entier non nul admet un autre entier plus grand que lui	$\exists n \in \mathbb{N}\, \forall p \in \mathbb{N}^*\; n > p$ ☐	$\forall p \mathbb{N}^*\, \exists n \in \mathbb{N} / n > p$ ☐	$\forall p \in N^*\, \forall n \in \mathbb{N}\; n > p$ ☐
4 Une proposition est :	Toujours fausse ☐	Toujours vraie ☐	Toujours ou bien vraie ou bien fausse ☐
5 La conjonction de deux propositions p et q est uniquement vraie si :	p est vraie ☐	q est vraie ☐	p et q sont toutes les deux vraies à la fois ☐
6 L'implication $p \Rightarrow q$ est fausse si	p est fausse ☐	p est vraie et q est fausse ☐	q est vraie ☐

AUTO - FORMATION

102 **Soit a , b deux réels tels que $b \neq 1$ et $2a \neq b$**

• **Montrer** que : $\frac{a}{b} \neq \frac{5}{2} \Longrightarrow \frac{2a+b}{2a-b} \neq \frac{3}{2}$.

103 **Montrer par récurrence que :**

a. $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 + 5 + 9 + \ldots\ldots\ldots + 4n + 1 = (n+1)(2n+1)$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 + 2 + 4 + \ldots\ldots\ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

104 **Montrer par disjonction de cas que :**

$\forall n \in \mathbb{N}$ $n^3 - n$ est divisible par 3 .

105 **Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.**

1 • **Montrer** que $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 + ax + a^2 > 0$.

2 • En déduire que $b^2 + ab + a^2 > 0$.

FICHE DE REMÉDIATION

Objectif Remédier aux difficultés liées à :
- Erreurs de raisonnement logique
- La mauvaise application du cours

Activités de remédiation aux difficultés	Remédiation	Critères et indicateurs
1 **Montrer** que la proposition suivante est vraie : $(P)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ x^2 + x + 1 > 0$ **Réponse :** Pour $x = 1$ on a : $x^2 + x + 1 = 3 > 0$ Donc la proposition est vraie.	$\Delta = -3 < 0$ donc $x^2 + x + 1$ a le même signe que $a = 1 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 + x + 1 > 0$	Un exemple n'est pas une démonstration et un contre exemple pour montrer qu'une telle proposition est fausse
2 **Montrer** que $\forall x \in \mathbb{R}$ $x > 1 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{x+2} > 1$ **Réponse :** $x > 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x > 2 \\ x + 2 > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 > 3 \\ x + 2 > 3 \end{cases}$ $\Rightarrow \dfrac{2x+1}{x+2} > \dfrac{3}{3} = 1$	$\dfrac{2x+1}{x+2} - 1 = \dfrac{x-1}{x+2}$ Et comme $x > 1$ On a alors $x - 1 > 0$ Et $x + 2 > 3 > 0$ Donc $\dfrac{x-1}{x+2} > 0$ Et par suite $\dfrac{2x+1}{x+2} > 1$	L'élève a utilisé le fait que : $\begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix} \Rightarrow \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{d}$ Et cette implication n'est pas toujours vraie

Auto-remédiation

Voir corrigé p228

1 **Montrer que :** $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 > 0$.

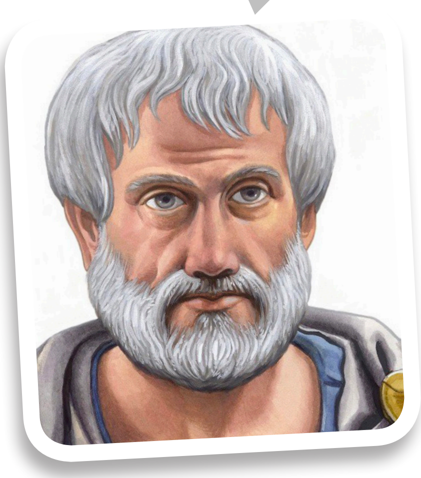
2 **Nier la proposition** $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 > 0$.

3 **Montrer que :** $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Longrightarrow \dfrac{3x+2}{x+2} > 2$.

4 **Nier la proposition** $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Longrightarrow \dfrac{3x+2}{x+2} > 2$.

Évasion culturelle

ARISTOTE



Si faire de la logique consistait à raisonner correctement, il serait impossible de connaître le premier logicien ; mais il paraît plus satisfaisant d'admettre que la logique consiste à réfléchir sur le raisonnement, à énoncer des règles ou des lois régissant les activités déductives, à décrire, par exemple en les formalisant, les démarches du raisonnement. Nous pouvons alors sans risque d'erreur désigner Aristote (384-322 av. J.C.) [4] comme le fondateur de la logique; il avait d'ailleurs conscience lui-même d'être un créateur, puisqu'on peut lire dans les Topiques : « Dans le cas de cette étude, il n'y avait pas une partie déjà élaborée, une autre non : il n'existait rien du tout». Aristote a principalement étudié le syllogisme, et son application à la démonstration ; un exemple de syllogisme, étudié dans les Premiers analytiques, situera les travaux d'Aristote : «si A est affirmé de tout B et B de tout C, nécessairement A est affirmé de tout C ».